L'agrégation des préférences
Enclos mathématique

Cadre formel

Pour n entier $(n \geq 2)$, on dispose d'un ensemble $V = \{1, 2, \cdots, n\}$ que l'on appellera l'ensemble des votants (ou électeurs).
Pour p entier, on dispose d'un ensemble $A = \{1, 2, \cdots, p\}$ que l'on appellera l'ensemble des candidats (ou alternatives[1]). À l'instar des votants, les candidats sont identifiés par un numéro. Parfois, dans certains exemples, on utilisera une lettre comme alias.
On supposera :

- ✓ $n \geq 2$ car s'il n'y a qu'un votant, le problème de l'agrégation est résolu…
- ✓ $p \geq 3$. En cas de candidat unique, la méthode de vote est accessoire. Et on découvrira que toutes les « pathologies » se manifestent à partir de 3 candidats.

On appelle liste de préférence (ou plus simplement préférence) sur A toute liste : $(P(1), P(2), \cdots, P(p))$ pour une certaine permutation P de $\{1, \cdots, p\}$. Chaque liste de préférence P sera donc assimilée à une permutation de A et $P(j) = a$ signifiera que le candidat a occupe la position j dans la liste P. L'ensemble des listes est donc assimilé au groupe symétrique S_p. On a, bien sûr, $|S_p| = p!$[2].
On appellera <u>profil de préférences</u> (ou plus simplement profil) une application :

$$\begin{aligned} V &\xrightarrow{\mathcal{P}} S_p \\ i &\mapsto P_i \end{aligned}$$

qui, à chaque votant i associe sa préférence P_i. Un profil peut être aussi assimilé à une liste $\mathcal{P} = (P_1, \cdots, P_n)$.
Couramment, plusieurs électeurs peuvent partager la même liste de préférence. On appellera <u>profil résumé</u>[3] $\widetilde{\mathcal{P}}$, associée à un profil de préférences $\mathcal{P}$, la donnée, pour chacune des $p!$ listes de préférences, du nombre de votants qu'elle recueille. Autrement dit $\widetilde{\mathcal{P}}$ est l'application $\begin{aligned} S_p &\to \mathbb{N} \\ P &\mapsto n_P \end{aligned}$ telle que n_P est le nombre de votants ayant P comme liste de préférence. On a, bien sûr, $\sum_{P \in S_p} n_P = n$.

Dans la pratique, on conviendra de se limiter aux préférences P telles que $n_P \neq 0$, autrement dit aux préférences effectivement exprimées.

Chaque liste de préférence P_i définit une relation d'ordre total strict sur l'ensemble A des candidats, que par un (léger) abus de langage, on désignera aussi par P_i. Ainsi $x \, P_i \, y$ signifiera que l'électeur i préfère le candidat x au candidat y et $x \, \overline{P}_i \, y$ sera la négation de l'assertion précédente.

---

[1] Le vote peut effectivement porter sur des projets, des options…

[2] $|E|$ désigne le nombre d'éléments d'un ensemble fini E.

[3] Certains auteurs parlent de situation de vote.

Pour un profil de préférences $\mathcal{P}=(P_1,P_2,\cdots P_n)$ et $x,y\in A$ distincts, on notera : $V_{x,y}(\mathcal{P})=\{i\in V\ /\ xP_iy\}$ autrement dit l'ensemble des votants préférant x à y et $v_{x,y}(\mathcal{P})=\left|V_{x,y}(\mathcal{P})\right|$

Si on note, pour une proposition logique L : $1_L=\begin{cases}1 \text{ si } L \text{ est vraie}\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$, on a alors :

$$v_{x,y}(\mathcal{P})=\sum_{i=1}^{n}1_{xP_iy}=\sum_{P\in S_p}n_P1_{xPy}=\sum_{\substack{P\in S_p\\ xPy}}n_P$$

À partir de tout profil $\mathcal{P}$, le but du jeu consiste, comme mentionné en introduction :

- ✓ soit à élaborer une préférence collective : $P\in S_p$
- ✓ soit, plus simplement, à désigner un vainqueur : $v\in A$.

1.Définition

Soit un ensemble de profil Π, on appelle :

- ✓ *fonction de préférence collective[4] (FPC) une application de $\Pi\xrightarrow{F}S_p$ qui à tout profil de préférences $\mathcal{P}=(P_1,P_2,\cdots P_n)\in\Pi$, associe une liste de préférence $F(\mathcal{P})$ dite préférence collective.*
- ✓ *fonction de choix collectif (FCC) une application de $\Pi\xrightarrow{G}A$ qui à tout profil de préférences $\mathcal{P}=(P_1,P_2,\cdots P_n)\in\Pi$, associe un candidat. $G(\mathcal{P})$ qualifié de vainqueur.*

REMARQUE :

La donnée d'une FPC, détermine de manière évidente une FFC. Nous verrons, ultérieurement qu'il est possible, sous certaines conditions, de construire une FPC à partir d'une FCC.

Propriétés souhaitables pour ces fonctions

Universalité

2.Définition

Une FPC F (resp. une FCC G) vérifie la propriété d''universalité (U) si et seulement si elle est définie pour tout profil : $\Pi=(S_p)^n$.

Les votants, comme les candidats, sont identifiés par un numéro que l'on peut juger arbitraire. Il apparaît naturel d'exiger qu'une FPC ou une FCC soit insensible à cet étiquetage et que leurs résultats ne soient pas perturbés par une valse des étiquettes. Ce qui conduit aux deux définitions suivantes :

[4] On dit encore fonction d'agrégation des préférences.

Anonymat

3.Définition

Une FPC F (resp. une FCC G) vérifie la propriété d'anonymat (A) si et seulement si : $\widetilde{\mathcal{P}} = \widetilde{\mathcal{P}'} \Rightarrow F(\mathcal{P}) = F(\mathcal{P}')$ *(resp.* $\widetilde{\mathcal{P}} = \widetilde{\mathcal{P}'} \Rightarrow G(\mathcal{P}) = G(\mathcal{P}')$

COMMENTAIRES :

Cette règle signifie que la FPC, ou la FCC ne se préoccupe pas de savoir qui parmi les votants a telle ou telle préférence, mais uniquement combien ? Autrement dit elle est invariante si on permute les étiquettes des votants. C'est une façon d'exprimer qu'il n'existe pas de votants privilégiés.

Neutralité

4.Définition

Une FPC F (resp. une FCC G) vérifie la propriété de neutralité (N) si et seulement si : Pour toute permutation σ de l'ensemble des candidats et tout profil $\mathcal{P} = (P_1, \cdots, P_i, \cdots P_n)$ alors :

$$F(\sigma \circ P_1, \cdots, \sigma \circ P_i, \cdots, \sigma \circ P_n) = \sigma \circ F(P_1, \cdots, P_i, \cdots, P_n)$$

$$\left(\textit{resp. } G(\sigma \circ P_1, \cdots, \sigma \circ P_i, \cdots, \sigma \circ P_n) = \sigma\big(G(P_1, \cdots, P_i, \cdots, P_n)\big)\right)$$

COMMENTAIRES

Cette propriété signifie que si l'on permute les étiquettes des candidats dans les préférences individuelles, les étiquettes doivent être permutées de la même façon dans les résultats.

Ces 2 propriétés peuvent entrer en conflit dans certaines circonstances (très artificielles cependant) :

Soit : $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} P_1 = (a,b,c) \\ P_2 = (b,a,c) \end{pmatrix}$. La procédure de vote peut hésiter entre a et b comme vainqueur, mais comme elle doit fournir une réponse, on supposera qu'elle couronne a : $G(\mathcal{P}) = a$

Soit maintenant : $\mathcal{P}' = \begin{pmatrix} P_1' = (b,a,c) \\ P_2' = (a,b,c) \end{pmatrix}$. Qu'en est-il de $G(\mathcal{P}')$?

- ✓ Si l'on se fonde sur l'anonymat de G, les profils résumés de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont identiques donc $G(\mathcal{P}') = a$.
- ✓ Si l'on se fonde sur la neutralité de G, on peut considérer que le passage de $\mathcal{P}$ à $\mathcal{P}'$ s'est fait par échange des étiquettes entre les 2 candidats a et b et on doit alors procéder au même échange pour le résultat final ce qui amène à conclure : $G(\mathcal{P}') = b$

Cette collision entre les 2 propriétés résulte que, dans les préférences individuelles, rien ne permet de départager a et b et que le résultat retourné par G est totalement arbitraire.

Unanimité

5. Définition

Soit $\mathcal{P}$ un profil.

Une FPC F *vérifie la propriété d'unanimité (U) si et seulement si, pour tout couple de candidats distincts* (x, y) *:*

$$V_{x,y}(\mathcal{P}) = V \Rightarrow x F(\mathcal{P}) y$$

Une FCC F *vérifie la propriété d'unanimité (U) si et seulement si, pour tout candidat* x

$$\left(\forall P \in \mathcal{P} \ : \ P(x) = 1\right) \Rightarrow G(\mathcal{P}) = x$$

COMMENTAIRE :

Pour une FPC, cela signifie que, si tous les électeurs placent x devant y, il doit en être de même dans la préférence collective.

Pour une FCC, cela signifie que, si tous les électeurs placent x en tête, il doit être vainqueur.

Indépendance

6. Définition

Une FPC F *vérifie la propriété d'indépendance*[5] *(I) si et seulement si pour tous profils de préférences* $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ *, et tout couple de candidats distincts* (x, y) *:*

$$\left(V_{x,y}(\mathcal{P}) = V_{x,y}(\mathcal{P}')\right) \Rightarrow \left(x F(\mathcal{P}) y \Leftrightarrow x F(\mathcal{P}') y\right)$$

COMMENTAIRE :

Cela signifie que si dans deux profils l'ensemble de ceux qui préfèrent x à y sont les mêmes, alors le classement collectif est le même.

[5] L'appellation complète est indépendance des alternatives non pertinentes (*indepedence of irrelevant alternatives*).

Les pères fondateurs

La méthode de Condorcet : les duels

L'idée de Condorcet est de regarder ce qui se passe dans le cas de duel entre 2 candidats.

7.Définition

Soit un profil $\mathcal{P}$, on dit qu'un candidat x bat un autre candidat y et on note $x \succ y$ si et seulement si :

$$v_{x,y}(\mathcal{P}) > v_{y,x}(\mathcal{P})$$

Un candidat x est dit vainqueur de Condorcet si et seulement si il bat tous les autres :

$$\forall y \in A - \{x\} : x \succ y$$

REMARQUES :

1. On supposera qu'en cas d'égalité entre $v_{x,y}(\mathcal{P})$ et $v_{y,x}(\mathcal{P})$ il existe une procédure de départage de sorte que l'on ait toujours $x \succ y$ ou (exclusif) $y \succ x$. Une telle relation est appelée un tournoi (*tournament*).
2. Lorsque la relation $\succ$ est transitive et définit donc une préférence collective, la méthode de Condorcet fournit donc une FPC respectant manifestement l'anonymat et l'indépendance et l'unanimité. Mais comme des exemples du paradoxe de Condorcet, l'ont montré ce n'est pas toujours le cas. La méthode de Condorcet n'est donc pas universelle.

Matrices de Condorcet

En vue d'appliquer la méthode de Condorcet, deux matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ peuvent être associées à un profil $\mathcal{P}$ ou un profil résumé $\widetilde{\mathcal{P}}$:

8.Définition

Soit un profil $\mathcal{P}$, on appelle :

- ✓ *matrice de Condorcet de type 1 la matrice $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ définie par :*

$$C_{i,j} = \begin{cases} v_{i,j}(\mathcal{P}) \text{ si } i \neq j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

- ✓ *matrice de Condorcet de type 2 la matrice $C' \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ définie par :*

$$C'_{i,j} = \begin{cases} C_{i,j} \text{-} C_{j,i} \text{ si } C_{i,j} > C_{j,i} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

La première résume les résultats de tous les duels.

La seconde n'est autre que la matrice de la relation $\succ$ ou du graphe orienté et valué qui lui est associé. La valeur de chaque flèche étant égal au nombre de voix d'avance du vainqueur.

On a les résultats suivants :

- ✓ Le nombre de victoires d'un candidat i est le nombre de termes >0 sur sa ligne.
- ✓ Le nombre de défaites d'un candidat i est le nombre de termes >0 sur sa colonne.

Procédures Maple pour calculer ces matrices

Un profil résumé sera représenté par une matrice $S \in \mathcal{M}_{k,p+1}(\mathbb{R})$ telle que :

- ✓ Chaque ligne $S_{l,\bullet}$ correspond à une préférence exprimée : $\left(S_{l,1},\cdots,S_{l,p}\right)$.
- ✓ $S_{l,\,p+1}$ est le nombre de votants ayant cette préférence.

Avec l'exemple du profil résumé :

Préférences			**Nombre de votants**
a	*b*	*c*	23
a	*c*	*b*	1
b	*a*	*c*	2
b	*c*	*a*	17
c	*a*	*b*	10
c	*b*	*a*	8
		n =	**61**

la matrice est :

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 23 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 17 \\ 3 & 1 & 2 & 10 \\ 3 & 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Procédure retournant la matrice C_1 *à partir de* S *:*

```
Condorcet1:=proc(S)
local i,j,k,l,p,C;
k:=rowdim(S);
p:=coldim(S)-1;
C:=matrix(p,p,(i,j)->0);
for l from 1 to k do
    for i from 1 to p do
          for j from i+1 to p do
          C[S[l,i],S[l,j]]:=C[S[l,i],S[l,j]]+S[l,p+1];
          od;
    od;
od;
RETURN(C);
end:
```

La complexité de cette procédure est en $O\left(k\,p^2\right)$.

Procédure retournant la matrice C_2 *à partir de* S *:*

```
condorcet2:=proc(S)
local i,j,p,r,C2;
C1:=condorcet1(S);
p:=coldim(C1);
C2:=matrix(p,p, (I,j)->0);
for i from 1 to p do
   for j from 1 to p do
   if C1[i,j]>C1[j,i] then C2[i,j]:= C1[i,j]-C1[j,i]; else C2[i,j]:=0;fi;
   od;
od;
RETURN(C2);
end :
```

La complexité de cette procédure est en $O\left(p^2\right)$.

EXEMPLE :

```
Condorcet1(S);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 34 & 26 \\ 27 & 0 & 42 \\ 35 & 19 & 0 \end{bmatrix}$$

```
condorcet2(S);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 23 \\ 9 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Minimum de désaccords et maximum d'accords

Lorsqu'un profil $\mathcal{P}$ n'est pas atteint par le paradoxe de Condorcet, autrement dit lorsque $F(\mathcal{P})$ est une préférence, alors cette dernière jouit d'une propriété intéressante.

9.Proposition

Pour $P, P' \in S_p$, *l'application* $S_p \times S_p \xrightarrow{d} \mathbb{R}^+$ *définie par :*

$$d(P, P') = \sum_{\substack{x,y \in A \\ xPy}} 1_{yP'x}$$

est une distance sur S_p .

DEMONSTRATION :

1. Symétrie. Remarquons, en préalable, que $d(P, P')$ est égal au nombre de paires $\{x, y\}$ pour lesquelles, les 2 préférences sont en désaccord. Donc : $d(P, P') = \sum_{\substack{x,y \in A \\ xPy}} 1_{yP'x} == \sum_{\substack{x,y \in A \\ xP'y}} 1_{yPx} = d(P', P)$.
2. $d(P, P') = 0 \Leftrightarrow (\forall x \neq y : xPy \Leftrightarrow xP'y) \Leftrightarrow P = P'$
3. Inégalité triangulaire. Soit 3 préférences : $P, P', P'' \in S_p$ et soit $\{x, y\}$ une paire pour laquelle P et P'' sont en désaccord : xPy et $yP''x$. Si il n'existe pas de désaccord sur $\{x, y\}$ entre P et P', c'est donc que : $xP'y$. Mais alors : $xP'y$ et $yP''x$, et donc P' et P'' sont en désaccord sur $\{x, y\}$. À tout désaccord sur $\{x, y\}$ entre P et P'' correspond donc au moins un désaccord soit entre P et P', soit entre P' et P''. Il en résulte que : $d(P, P'') \leq d(P, P') + d(P', P'')$.

REMARQUES :

$d(P, P')$ varie de 0 (accord parfait) à C_p^2 lorsque la préférence P' est le « miroir » ($P'(i) = P(p+1-i)$) de la préférence P.

Cette distance, fondée sur le nombre de désaccords entre 2 préférences, est connue sous le nom de distance de Kemeny. Il existe, bien sûr, d'autres distances envisageables sur S_p. Une autre sera présentée dans le paragraphe intitulée : « *Une autre piste* ».

10. Proposition

Soit profil $\mathcal{P}=(P_1,\cdots,P_n)$ *tel que la méthode de Condorcet ait pour résultat une préférence* $F(\mathcal{P})$ *, alors :*

$$F(\mathcal{P})=\underset{P\in S_p}{\arg\min}\sum_{i=1}^{n}d(P,P_i)\ .$$

Autrement dit la solution de Condorcet minimise la somme des désaccords.

DEMONSTRATION :

Soit $P\in S_p$ et $\mathcal{P}=(P_1,\cdots,P_n)$ un profil, la somme des désaccords entre la préférence P et les préférences du profil $\mathcal{P}$ est : $\sum_{i=1}^{n}d(P,P_i)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{xPy}1_{yP_i x}=\sum_{xPy}\sum_{i=1}^{n}1_{yP_i x}$ .Or $\sum_{i=1}^{n}1_{yP_i x}=v_{y,x}(\mathcal{P})$. Donc :

$$\sum_{i=1}^{n}d(P,P_i)=\sum_{xPy}v_{y,x}(\mathcal{P})$$

Par ailleurs, $v_{y,x}(\mathcal{P})+v_{x,y}(\mathcal{P})=n$ et pour $P=F(\mathcal{P})$, $xPy\Leftrightarrow v_{y,x}(\mathcal{P})<v_{x,y}(\mathcal{P})$. Le minimum de la somme des désaccords est donc bien obtenue avec $P=F(\mathcal{P})$.

REMARQUE :

On aurait pu, tout aussi bien, se fonder sur la notion d'accord entre P et P' définie par : $\sum_{\substack{x,y\in A\\ xPy}}1_{xP'y}$ pour aboutir à la conclusion « duale » : la solution de Condorcet maximise la somme des accords.

L'apparition du paradoxe de Condorcet est-elle rare ?

Des simulations montrent que cette pathologie n'est pas exceptionnelle. Une réponse précise est fournie, dans le cas de 3 candidats avec un nombre impair de votants par la formule de Gehrlein-Fishburn :

11. Proposition (formule de Gehrlein-Fishburn)

Pour 3 candidats et un nombre impair de votants $n=2k+1$ *, sous l'hypothèse d'équiprobabilité des profils résumés, alors la probabilité qu'il existe un vainqueur de Condorcet est :*

$$P_C=\frac{15}{16}\frac{(n+3)^2}{(n+2)(n+4)}=\frac{15}{4}\frac{(k+2)^2}{(2k+3)(2k+5)}$$

DEMONSTRATION (un peu laborieuse…) :

Remarques préliminaires

1. Pour 3 candidats l'existence d'un vainqueur de Condorcet équivaut à l'absence du paradoxe.
2. L'hypothèse d'équiprobabilité porte sur les profils résumés non sur les profils. Si on numérote les 6 préférences possibles sur $A=\{a,b,c\}$, profil résumé $\widetilde{\mathcal{P}}$ se représente par :

Numéro	Préférences	Nombre de voix
1	(a,b,c)	x_1
2	(a,c,b)	x_2
3	(b,a,c)	x_3
4	(b,c,a)	x_4
5	(c,a,b)	x_5
6	(c,b,a)	x_6

Avec $\sum_{i=1}^{6} x_i = n = 2k+1$.

Le nombre de situations de votes est alors égal au nombre de solutions entières de $\sum_{i=1}^{6} x_i = n$ qui est autre que le nombre de combinaisons à répétition de n parmi 6 égal à $\Gamma_6^n = C_{n+6-1}^n$.

Soit $\widetilde{\mathcal{P}}$ une situation de vote donnée, sous l'hypothèse d'équiprobabilité, sa probabilité est donc :

$$P\left(\widetilde{\mathcal{P}}\right) = \frac{1}{C_{n+5}^n} = \frac{n!5!}{(n+5)!} = \frac{5!}{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)} = \frac{5!}{(2k+6)(2k+5)(2k+4)(2k+3)(2k+2)}$$

$$P\left(\widetilde{\mathcal{P}}\right) = \frac{15}{(k+3)(2k+5)(k+2)(2k+3)(k+1)}$$

On est alors ramené à un problème de dénombrement : déterminer le nombre de situations de vote où a est vainqueur de Condorcet. Sous les conditions : $x_i \in \mathbb{N}$ et $\sum_{i=1}^{6} x_i = n = 2k+1$

$$a \text{ vainqueur de Condorcet} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x_4 + x_6 \le k & (1) \\ 0 \le x_2 \le k - x_4 - x_6 & (2) \\ 0 \le x_5 \le k - x_4 - x_6 & (3) \end{cases}$$

Pour $x_4 + x_6 = x$, x_2, x_5 fixés, $x_1 + x_2 = 2k+1 - x - x_3 - x_5$. Il existe alors :

✓ $x+1$ couples (x_4, x_6)

et

✓ $2k+2-x-x_2-x_5$ couples (x_1, x_2)

vérifiant (1), (2) et (3) possibles.

Le nombre α de situations de vote où a est vainqueur de Condorcet est donc :

$$\alpha = \sum_{x=0}^{k} \sum_{x_5=0}^{k-x} \sum_{x_2=0}^{k-x} (x+1)\left(2k+2-x-x_5-x_2\right)$$

En se souvenant de la formule $\sum_{j=0}^{p} j = \frac{p(p+1)}{2}$, il ne reste plus qu'à calculer…

Commençons par le calcul de la somme intérieure :

$$\sum_{x_2=0}^{k-x} (x+1)\left(2k+2-x-x_5-x_2\right) = (x+1)\left(\sum_{x_2=0}^{k-x}\left(2k+2-x-x_5\right) - \sum_{x_2=0}^{k-x} x_2\right)$$

$$= (x+1)\left(\left(k-x+1\right)\left(2k+2-x-x_5\right) - \frac{1}{2}(k-x+1)(k-x)\right)$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)\left(k-x+1\right)\left(4k+4-2x-2x_5-k+x\right)$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)\left(k-x+1\right)\left(3k+4-x-2x_5\right)$$

Ensuite :

$$\sum_{x_5=0}^{k-x}\sum_{x_2=0}^{k-x}(x+1)\left(2k+2-x-x_5-x_2\right)=\sum_{x_5=0}^{k-x}\frac{1}{2}(x+1)\left(k-x+1\right)\left(3k+4-x-2x_5\right)$$

$$=\frac{1}{2}(x+1)\left(k-x+1\right)\sum_{x_5=0}^{k-x}\left(3k+4-x-2x_5\right)$$

$$=\frac{1}{2}(x+1)\left(k-x+1\right)\left(\sum_{x_5=0}^{k-x}\left(3k+4-x\right)-2\sum_{x_5=0}^{k-x}\left(x_5\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}(x+1)\left(k-x+1\right)\left((k-x+1)\left(3k+4-x\right)-(k-x+1)(k-x)\right)$$

$$=\frac{1}{2}(x+1)\left(k-x+1\right)^2\left(3k+4-x-k+x\right)$$

$$=(x+1)\left(k-x+1\right)^2(k+2)$$

Enfin

$$\alpha=\sum_{x=0}^{k}(x+1)\left(k-x+1\right)^2(k+2)=(k+2)\sum_{x=0}^{k}(x+1)\left(k-x+1\right)^2$$

Ou presque… Pour terminer la sommation de $\sum_{x=0}^{k}(x+1)\left(k-x+1\right)^2$, on va effectuer un changement de variable en posant $k-x+1=y\Leftrightarrow x+1=k+2-y$. D'où :

$$\sum_{x=0}^{k}(x+1)\left(k-x+1\right)^2=\sum_{y=1}^{k+1}(k+2-y)y^2=(k+2)\sum_{y=1}^{k+1}y^2-\sum_{y=1}^{k+1}y^3 .$$

Or selon les formules de Bernouilli : $\sum_{y=1}^{k+1}y^2=\frac{(2k+3)(k+2)(k+1)}{6}$ et $\sum_{y=1}^{k+1}y^3=\frac{(k+2)^2(k+1)^2}{4}$

Au final : $\alpha=(k+2)^3(k+1)\left(\frac{2k+3}{6}-\frac{k+1}{4}\right)=\frac{1}{12}(k+3)(k+2)^{\overset{2}{3}}(k+1)$.

La probabilité que a soit vainqueur de Condorcet est donc :

$$\begin{aligned}P\left[a\ \text{vainqueur de Condorcet}\right]&=\alpha\frac{15}{(k+3)(2k+5)(k+2)(2k+3)(k+1)}\\&=\frac{1}{12}(k+3)(k+2)^3(k+1)\frac{15}{(k+3)(2k+5)(k+2)(2k+3)(k+1)}\\&=\frac{5}{4}\frac{(k+2)^2}{(2k+5)(2k+3)}\end{aligned}$$

Comme les événements « *a vainqueur de Condorcet* », « *b vainqueur de Condorcet* », « *c vainqueur de Condorcet* » sont incompatibles 2 à 2. La probabilité qu'il existe un vainqueur de Condorcet est donc :

$$P_C=\frac{15}{4}\frac{(k+2)^2}{(2k+5)(2k+3)}=\frac{15}{16}\frac{(n+3)^2}{(n+4)(n+2)}$$

Numériquement :

n	3	5	9	99	999
P_C	96,4%	95,2%	94,4%	93,8%	93,8%
$1-P_C$	3,6%	4,8%	5,6%	6,2%	6,2%

La méthode de Borda : les scores

Pour échapper au paradoxe de Condorcet, Borda propose une autre méthode fondée sur l'attribution de points décroissants en fonction de la place. Le score de Borda d'un candidat est le total des points qu'il recueille. Les candidats sont alors classés en fonction de leur score de Borda, avec en tête, bien sûr, celui ayant le meilleur score. Plus formellement :

12.Définition

Soit une liste $\left(pt(1),\cdots,pt(p)\right)$ *strictement décroissante de nombres, appelée barème*[6]*. Pour une profil résumé* $\widetilde{\mathcal{P}}:P\mapsto n_P$ *, le score de Borda d'un candidat* x *est défini par :*

$$score(x)=\sum_{P\in S_p} n_P\ pt\left(P^{-1}(x)\right)$$

ou pour un profil $\mathcal{P}=\left(P_1,\cdots,P_n\right)$

$$score(x)=\sum_{i=1}^{n} pt\left(P_i^{-1}(x)\right)$$

REMARQUES :

Pour une liste de préférence $P\in S_p$, $P(j)=x$ signifie que le candidat x occupe le rang j. Donc le rang occupé par le candidat x est $P^{-1}(x)$. Le nombre de votants ayant cette préférence est n_P. Donc le nombre de points que ces votants apportent au candidat x est $n_P\ pt\left(P^{-1}(x)\right)$, ce qui justifie la première formule.

Pour la deuxième, il suffit de remarquer que le votant i apporte $pt\left(P_i^{-1}(x)\right)$ points au candidat x.

Il résulte immédiatement de cette définition que la méthode de Borda respecte les propriétés d'anonymat, d'unanimité. Si elle intègre une convention pour briser les (rares) cas d'égalité de scores, elle définit une FPC universelle.

Le nombre total de points distribués selon la méthode de Borda dépend uniquement du nombre de votants et du barème fixé.

13.Proposition

$$\sum_{x=1}^{p} score(x)=n\times\sum_{j=1}^{p} pt(j)$$

DEMONSTRATION :

$$\sum_{x=1}^{p} score(x)=\sum_{x=1}^{p}\ \sum_{P\in S_p} n_P\ pt\left(P^{-1}(x)\right)=\sum_{P\in S_p} n_P\sum_{x=1}^{p} pt\left(P^{-1}(x)\right)$$

Or :

- d'une part $\left\{P^{-1}(x)/x\in A\right\}=\{1,2,\cdots,p\}$, donc $\sum_{x=1}^{p} pt\left(P^{-1}(x)\right)=\sum_{j=1}^{p} pt\left(j\right)$
- de l'autre $\sum_{P\in S_p} n_P=n$.

[6] On peut élargir cette définition du barème àç des listes non toujours strictement décroissantes.

D'où la formule.

Matrice de Borda

À l'instar de ce qui a été fait dans le cadre de la méthode de Condorcet, on peut définir une matrice $B\in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

14.Définition

On appelle matrice de Borda associée à un profil $\mathcal{P}=(P_1,\cdots,P_n)$ *la matrice* $B\in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ *définie par :*

$$B_{i,j}=\left|\{v\in V\,/\,P_v(j)=i\}\right|=\sum_{v=1}^{n}1_{P_v(j)=i}$$

Autrement dit $B_{i,j}$ *est le nombre de votants qui placent le candidat i en position j.*

Comme pour les matrices de Condorcet, cette matrice ne dépend que de du profil résumé :

$$B_{i,j}==\sum_{P\in S_p} n_P 1_{P(j)=i}=\sum_{\substack{P\in S_p\\ P(j)=i}} n_P$$

15.Proposition

La somme de chaque ligne et la somme de chaque colonne de la matrice de Borda A *sont égales à* $n=|V|$ *:*

$$\sum_{i=1}^{p}B_{i,j}=\sum_{j=1}^{p}B_{i,j}=n$$

DEMONSTRATION :

L'idée est simple : si on additionne le nombre de fois où un candidat est classé en tête, le nombre de fois il est classé en second, etc. on obtient le nombre de fois où il est classé, c'est-à-dire le nombre de votants.

Plus formellement :

$\sum_{i=1}^{p}B_{i,j}=\sum_{i=1}^{p}\sum_{v=1}^{n}1_{P_v(j)=i}=\sum_{v=1}^{n}\sum_{i=1}^{p}1_{P_v(j)=i}$. Or pour un votant v donné et un rang j fixé, il n'existe qu'un seul candidat i au rang j donc : $\sum_{i=1}^{p}1_{P_v(j)=i}=1$ et $\sum_{i=1}^{p}A_{i,j}=\sum_{v=1}^{n}1=n$

Pour la même raison : $\sum_{j=1}^{p}B_{i,j}=\sum_{j=1}^{p}\sum_{v=1}^{n}1_{P_v(j)=i}=\sum_{v=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}1_{P_v(j)=i}=\sum_{v=1}^{n}1=n$.

La matrice Borda fournit un moyen pratique de calculer les scores :

16.Proposition

Soit un barème : $R=(pt(1),\cdots,pt(p))$, B *la matrice de Borda associée à* $\mathcal{P}$ *et soit le vecteur colonne* $T=AR^t$. *Alors* T_i *est le score du candidat* i.

DEMONSTRATION :

$T_i=\sum_{j=1}^{p}B_{i,j}\,pt(j)$. Or $B_{i,j}$ est égal au nombre de votants qui placent le candidat i en position j. La somme représente bien le nombre total de points que le candidat i récolte.

Procédure Maple pour calculer cette matrice

```
borda:=proc(PROFIL)
local i,j,ni,k,li,p,B;
k:=rowdim(PROFIL);
p:=coldim(PROFIL)-1;
B:=matrix(p,p,(i,j)->0);
for li from 1 to k do
   for j from 1 to p do
      ni:=PROFIL[li,j];
      B[ni,j]:= B[ni,j]+PROFIL[li,p+1];
   od;
od;
RETURN(B);
end:
```

EXEMPLE :

Avec l'exemple de profil résumé précédent dont la matrice est :

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 23 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 17 \\ 3 & 1 & 2 & 10 \\ 3 & 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

```
evalm(borda(S));
```

$$\begin{bmatrix} 24 & 12 & 25 \\ 19 & 31 & 11 \\ 18 & 18 & 25 \end{bmatrix}$$

Et pour calculer les scores de Borda, une deuxième procédure :

```
bordascore:=proc(PROFIL, BAREME)
local p,B,BA;
p:=coldim(PROFIL)-1;
B:=borda(PROFIL);
BA:=matrix(1,p,BAREME);
RETURN(multiply(BA,transpose(B)));
end:
```

```
bordascore(S,[2,1,0]);
```

$$[60 \quad 69 \quad 54]$$

Et en changeant le barème :

```
bordascore(S,[4,1,0]);
```

$$[108 \quad 107 \quad 90]$$

Manipulation des votes

Un exemple fourni dans la première partie a montré la vulnérabilité de la méthode de Borda aux manipulations. La définition suivante formalise cette notion :

17. Définition

Soit une fonction de choix collectif $G:(S_p)^n \xrightarrow{G} A$ *et un profil* $\mathcal{P}=(P_1,\cdots,P_i,\cdots P_n)$. *Ce profil* $\mathcal{P}$ *est dit manipulable par le votant i si le profil* $\mathcal{P}'=(P_1,\cdots,P_i',\cdots P_n)$ *obtenu si il vote* P_i' *au lieu de* P_i *est tel que :*

$$G(\mathcal{P}')\,P_i\,G(\mathcal{P})$$

La fonction G *est dite non manipulable (NM) si et seulement si elle est exempte de manipulation, autrement dit si et seulement si, pour tout profil de préférences* $\mathcal{P}=(P_1,\cdots,P_i,\cdots P_n)$, *tout votant i et tout profil* $\mathcal{P}'=(P_1,\cdots,P_i',\cdots P_n)$ *:*

$$G(\mathcal{P})=G(\mathcal{P}') \text{ ou } G(\mathcal{P})\,P_i\,G(\mathcal{P}').$$

La méthode de Condorcet est par contre immunisée contre les manipulations :

18. Proposition

Soit un profil $\mathcal{P}=(P_1,\cdots,P_i,\cdots P_n)$, *conduisant à un vainqueur de Condorcet* x *et* i *un votant, préférant un candidat* y *à* x. *Alors, aucun changement de sa liste de préférence ne fera de* y *le vainqueur de Condorcet.*

DEMONSTRATION :

On a donc : $P_i=(\cdots,y,\cdots,x,\cdots)$. Si x est vainqueur de Condorcet du profil $\mathcal{P}$, c'est, en particulier, que x bat y : $x \succ y \Leftrightarrow v_{x,y}(\mathcal{P}) > v_{y,x}(\mathcal{P})$.

Alors quelque soit son vote P_i', on aura pour le profil $\mathcal{P}'=(P_1,\cdots,P_i',\cdots P_n)$:

$v_{x,y}(\mathcal{P}') \geq v_{x,y}(\mathcal{P})$ et $v_{y,x}(\mathcal{P}') \leq v_{y,x}(\mathcal{P})$

D'où : $v_{x,y}(\mathcal{P}') > v_{y,x}(\mathcal{P}')$.

Donc y, battu par x ne saurait être vainqueur de Condorcet (x peut certes être détrôné mais pas au profit de y).

Les théorèmes d'impossibilité

Théorème d'Arrow

19.Définition

Une FPC F est dite dictatoriale si et seulement si :

$$\exists i \in V, \forall \mathcal{P} \in \left(S_p\right)^n : F(\mathcal{P}) = P_i$$

Le votant i est alors qualifié de dictateur.

20.Théorème d'Arrow

Si le nombre n de votants est ≥ 3 et le nombre p de candidats et ≥ 3, toute FPC F vérifiant les propriétés d'unanimité et d'indépendance, est dictatoriale. :

Pour démontrer ce résultat, nous allons introduire la notion de coalition décisive

Préliminaires : coalitions décisives

Pour un profil de préférences $\mathcal{P}$ et un ensemble de votants $X \subseteq V$, nous utiliserons enfin la notation[7] suivante : $\mathcal{P}:(X : xyz)$ pour signifier que les votants de X préfèrent x à y et y à z.
Dans tout ce qui suit, on supposera que la FPC F possède les propriétés d'unanimité (U) et d'indépendance (I).

21.Définition

Soit un couple $(x,y) \in A^2$, $(x \neq y)$. Un ensemble $X \subseteq V$ est dite coalition $(x,y)-$décisive pour la FPC F si et seulement si pour tout profil de préférences $\mathcal{P}$: $V_{x,y}(\mathcal{P}) = X \Rightarrow x F(\mathcal{P}) y$.

Une coalition est $(x,y)-$décisive si la propriété énoncée est vraie pour tout profil de préférences $\mathcal{P}$. Mais, en fait, il suffit qu'elle soit vérifiée pour un profil de préférences pour l'être pour tous.

22.Proposition

Soit un couple $(x,y) \in A^2$ $(x \neq y)$. Un ensemble $X \subseteq V$ est une coalition $(x,y)-$décisive pour la FPC F si et seulement si il existe un profil de préférences $\mathcal{P}$: $V_{x,y}(\mathcal{P}) = X$ et $x F(\mathcal{P}) y$.

DEMONSTRATION :

Soit $\mathcal{P}$ un profil de préférences telle que : $V_{x,y}(\mathcal{P}) = X$ et $x F(\mathcal{P}) y$ et $\mathcal{P}'$ un autre profil de préférences telle que $V_{x,y}(\mathcal{P}') = X$. On a donc $V_{x,y}(\mathcal{P}) = V_{x,y}(\mathcal{P}')$ et par indépendance (I) : $x F(\mathcal{P}) y \Rightarrow x F(\mathcal{P}') y$.

23.Définition

Une coalition X est décisive pour une FPC F si et seulement si elle est $(x,y)-$décisive pour tout couple $(x,y) \in A^2$ $(x \neq y)$.

La surprise va venir de la proposition suivante :

---

[7] Notation reprise de B. Monjardet.

24. Proposition

Si une coalition X est $(x,y)-$ décisive pour <u>un</u> couple $(x,y)\in A^2$ $(x\neq y)$, elle est décisive.

DEMONSTRATION :

Soit X coalition (x,y)-décisive pour le couple $(x,y)\in A^2$,. $(x\neq y)$. Soit un candidat $z\notin\{x,y\}$. Considérons un profil de préférences $\mathcal{P}$ telle que :

$$\left|\begin{array}{l}\mathcal{P}:(X:xyz)\\ \mathcal{P}:(\overline{X}:yzx)\end{array}\right.$$

Alors :

- ✓ Comme X est $(x,y)-$décisive : $x\,F(\mathcal{P})\,y$
- ✓ Par unanimité : $y\,F(\mathcal{P})\,z$
- ✓ Par transitivité $x\,F(\mathcal{P})\,z$

Donc X est (x,z)-décisive.

Soit maintenant un profil de préférences $\mathcal{P}'$ telle que :

$$\left|\begin{array}{l}\mathcal{P}':(X:zxy)\\ \mathcal{P}':(\overline{X}:zyx)\end{array}\right.$$

Alors :

- ✓ Par unanimité : $z\,F(\mathcal{P}')\,x$
- ✓ Comme X est $(x,y)-$décisive : $x\,F(\mathcal{P}')\,y$
- ✓ Par transitivité $z\,F(\mathcal{P}')\,y$

Donc X est $(z,y)-$décisive.

Si $t\in V-\{x,y,z\}$, alors le même raisonnement montre que X est $(z,t)-$décisive. Et au final X est décisive pour tout couple.

NOTATION :

Pour une FPC F, on note $\mathcal{D}=\{X\subseteq V\ /\ X \text{ coalition décisive}\}$. Remarquons que $\mathcal{D}$ n'est jamais vide puisque, en vertu de la propriété d'unanimité (U), $V\in\mathcal{D}$.

25. Proposition

$X\notin\mathcal{D}\Leftrightarrow\overline{X}\in\mathcal{D}$.

DEMONSTRATION :

1. $\Leftarrow$

Soit $X\subseteq V$, $\overline{X}\in\mathcal{D}$. Si $X\in\mathcal{D}$, l'examen du profil $\mathcal{P}$:

$$\left|\begin{array}{l}\mathcal{P}:(X:xy)\\ \mathcal{P}:(\overline{X}:yx)\end{array}\right.$$

conduit à une contradiction…

2. $\Rightarrow$

Soit $X\subseteq V$, $X\notin\mathcal{D}$. Considérons trois éléments distincts $x,y,z\in A$ et soit un profil de préférences $\mathcal{P}$ telle que :

$$\left|\begin{array}{l}\mathcal{P}:(X:xzy)\\ \mathcal{P}:(\overline{X}:zyx)\end{array}\right.$$

Par unanimité : $zF(\mathcal{P})y$.

$V_{x,y}(\mathcal{P})=X$. Si $xF(\mathcal{P})y$, alors X serait une coalisation décisive en contradiction avec $X\notin\mathcal{D}$. Donc $yF(\mathcal{P})x$ et par transitivité $zF(\mathcal{P})x$. Or $V_{z,x}(\mathcal{P})=\overline{X}$, donc $\overline{X}$ est $(z,x)-$décisive,. donc décisive selon la proposition 24.

On en tire immédiatement les conséquences suivantes :

26. Corollaire

1. $\varnothing\notin\mathcal{D}$

2. V n'est pas la seule coalition décisive.

3. En particulier si $V=\{1,2\}$ *, alors soit* $\{1\}\in\mathcal{D}$ *, soit* $\{2\}\in\mathcal{D}$ *.*

27. Proposition

$X\in\mathcal{D}$ et $X\subseteq Y\Rightarrow Y\in\mathcal{D}$.

DEMONSTRATION :

Cette propriété signifie que toute partie de V contenant une coalition décisive est décisive. L'appellation « décisive », suggère que cela va de soi[8]. Mais une appellation ne tient pas lieu de démonstration.

Soit $X\in\mathcal{D}$ et $X\subset Y$ Si $Y=V$, c'est évident.

Sinon, supposons $Y\notin\mathcal{D}$ la proposition 25 assure que $\overline{Y}\in\mathcal{D}$.

Soit trois candidats distincts *x, y, z.* et un profil de préférences $\mathcal{P}$ telle que :

$$\left|\begin{array}{l}\mathcal{P}:(X:zxy)\\ \mathcal{P}:(Y-X:zyx)\\ \mathcal{P}:(\overline{Y}:yzx)\end{array}\right.$$

- ✓ X étant une coalition décisive, $X=V_{x,y}(\mathcal{P})\Rightarrow xF(\mathcal{P})y$.
- ✓ $\overline{Y}$ étant une coalition décisive, $\overline{Y}=V_{y,z}(\mathcal{P})\Rightarrow yF(\mathcal{P})z$.
- ✓ Par transitivité : $xF(\mathcal{P})z$
- ✓ Mais par unanimité $zF(\mathcal{P})x$.

Contradiction, donc $Y\in\mathcal{D}$.

Démonstration du théorème d'Arrow

On dispose maintenant de l'outillage nécessaire pour la démonstration.

Soit $X\in\mathcal{D}$, minimale au sens de l'inclusion, autrement dit telle qu'aucune de ses parties strictes ne soit décisive. Alors X est un singleton.

Pour $n=2$, voir corollaire 26.

Pour $n\geq 3$:

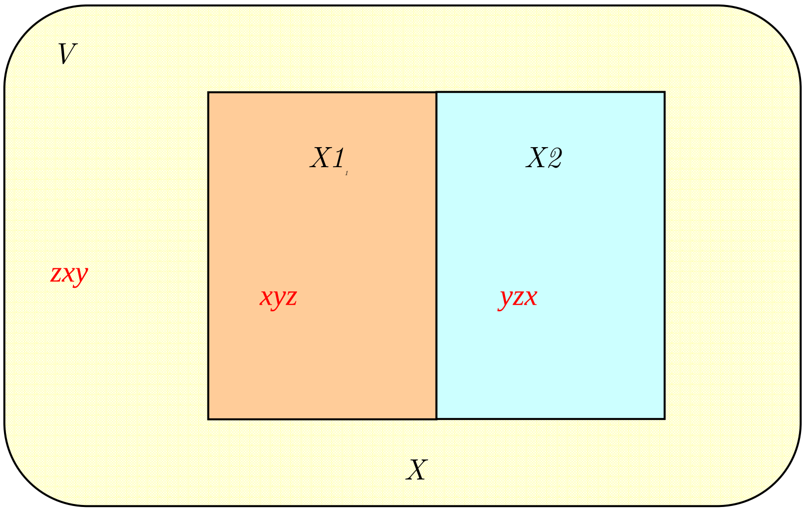
Toujours selon le corollaire, remarquons d'abord que, : $X\neq\varnothing$ .et que V n'étant pas la seule coalition décisive, elle n'est pas minimale et donc : $X\subset V$

Si X n'est pas un singleton, il existe 2 ensembles $X_1, X_2\neq\varnothing$ tels que : $X=X_1\cup X_2$ et $X_1\cap X_2=\varnothing$.

[8] Ce serait d'ailleurs évident à démontrer si nous avions ajouté aux propriétés (U) et (I) la propriété dite de « monotonie ». Mais, dans la perspective de démonstration du théorème d'Arrow, cette hypothèse n'est pas nécessaire.

Considérons trois éléments distincts $x, y, z \in A$ et soit un profil de préférences $\mathcal{P}$ telle que :

$$\left| \begin{array}{l} \mathcal{P} : \left(\overline{X} : zxy \right) \\ \mathcal{P} : \left(X_1 : xyz \right) \\ \mathcal{P} : \left(X_2 : yzx \right) \end{array} \right.$$



Comme X est décisive, $y F(\mathcal{P}) z$.

Par minimalité de X, X_1 et X_2 sont non décisives, donc selon la proposition précédente, $\overline{X_1}$ et $\overline{X_2}$ le sont.

Comme $\overline{X_1}$ est décisive : $z F(\mathcal{P}) x$. Et, par transitivité, $y F(\mathcal{P}) x$.

Mais, comme $\overline{X_2}$ est décisive, $x F(\mathcal{P}) y$. Contradiction.

Il existe donc $i \in V$ tel que $X = \{i\}$. La coalition réduite à $\{ i \}$ est donc décisive ce qui fait de i un dictateur. En effet, pour tout profil de préférences $\mathcal{P} = \left(P_1, P_2, \cdots P_n \right)$ et tout couple de candidats distincts (x, y), si $x P_i y$, alors $\{i\} \subseteq V_{x,y}(\mathcal{P})$. $V_{x,y}(\mathcal{P})$ est donc décisive selon la proposition 27, ce qui implique $x F(\mathcal{P}) y$. Donc $F(\mathcal{P}) = P_i$

Théorème de Gibbard-Satterthwaite

Des exemples de « manipulation » ont été présentés en première partie. Voici la formalisation de cette notion :

28.Définition

Soit une fonction de choix collectif G *et un profil* $\mathcal{P}=(P_1,\cdots,P_i,\cdots P_n)$. *Ce profil* $\mathcal{P}$ *est dit manipulable par le votant i si le profil* $\mathcal{P}'=(P_1,\cdots,P_i',\cdots P_n)$ *obtenu si il vote* P_i' *au lieu de* P_i *est tel que :*

$$G(\mathcal{P}')\,P_i\,G(\mathcal{P})$$

La fonction G *est dite non manipulable (NM) si et seulement si elle est exempte de manipulation, autrement dit si et seulement si, pour tout profil de préférences* $\mathcal{P}=(P_1,\cdots,P_i,\cdots P_n)$, *tout votant i et tout profil* $\mathcal{P}'=(P_1,\cdots,P_i',\cdots P_n)$ *:*

$$G(\mathcal{P})=G(\mathcal{P}') \text{ ou } G(\mathcal{P})\,P_i\,G(\mathcal{P}').$$

Comme cela a déjà été dit, la méthode de Condorcet, sous réserve qu'elle couronne un vainqueur est immunisée contre cette maladie :

29.Proposition

Soit un profil $\mathcal{P}=(P_1,\cdots,P_i,\cdots P_n)$, *conduisant à un vainqueur de Condorcet* x *et* i *un votant, préférant un candidat* y *à* x. *Alors, aucun changement de sa liste de préférence ne fera de* y *le vainqueur de Condorcet.*

DEMONSTRATION :

On a donc : $P_i=(\cdots,y,\cdots,x,\cdots)$. Si x est vainqueur de Condorcet du profil $\mathcal{P}$, c'est, en particulier, que x bat y : $x \succ y \Leftrightarrow v_{x,y}(\mathcal{P})>v_{y,x}(\mathcal{P})$.

Alors quelque soit son vote P_i', on aura pour le profil $\mathcal{P}'=(P_1,\cdots,P_i',\cdots P_n)$:

$v_{x,y}(\mathcal{P}')\geq v_{x,y}(\mathcal{P})$ et $v_{y,x}(\mathcal{P}')\leq v_{y,x}(\mathcal{P})$

Donc dans tous les cas $v_{x,y}(\mathcal{P}')>v_{y,x}(\mathcal{P}')$ et donc y, battu par x ne saurait être vainqueur de Condorcet (x peut certes être détrôné mais pas au profit de y).

Avant d'énoncer et démontrer le théorème de Gibbard-Satterthwaite, voici 3 petits lemmes :

30.Lemme

Soit $\mathcal{P}=(P_1,\cdots,P_i,\cdots,P_n)$ *avec* $G(\mathcal{P})=a$ *et* $\mathcal{P}'=(P_1',\cdots,P_i',\cdots,P_n')$ *avec* $G(\mathcal{P}')=a'$ *et* $a\neq a'$. *Si* G *est non manipulable, alors il existe au moins un votant* i *tel que* $a\,P_i\,a'$ *et* $a'\,P_i'\,a$.

COMMENTAIRE :

Autrement dit, pour que le gagnant a soit détrôné par a', en passant du profil $\mathcal{P}$ au profil $\mathcal{P}'$ il faut qu'un des votants au moins fasse passer dans ses préférences a' devant a. Dans la suite, on dira qu'alors a est dépassé par a' en passant de $\mathcal{P}$ à $\mathcal{P}'$.

On peut encore formuler cet énoncé de la façon suivante. Si $G(\mathcal{P})=a$ et si dans le profil $\mathcal{P}'$, chaque votant place a à un rang supérieur ou égal à celui occupé dans $\mathcal{P}$, alors $G(\mathcal{P}')=a$. C'est la propriété de monotonie : un candidat victorieux qui voit son classement s'améliorer d'un profil à l'autre le demeure.

DEMONSTRATION :

Si $a \neq a'$, il existe au moins un votant i qui a modifié son vote : $P_i \neq P_i'$. Il existe 4 cas possibles pour les positions respectives de a et a' dans P_i et P_i' :

1. $P_i = (\cdots, a', \cdots, a, \cdots)$
   $P_i' = (\cdots, a', \cdots, a, \cdots)$
2. $P_i = (\cdots, a, \cdots, a', \cdots)$
   $P_i' = (\cdots, a, \cdots, a', \cdots)$
3. $P_i = (\cdots, a', \cdots, a, \cdots)$
   $P_i' = (\cdots, a, \cdots, a', \cdots)$
4. $P_i = (\cdots, a, \cdots, a', \cdots)$
   $P_i' = (\cdots, a', \cdots, a, \cdots)$

Dans les trois premiers cas, il y a manipulation du votant i. En changeant son vote de P_i vers P_i' (cas 1 et 3) ou de P_i' en P_i (cas 2) il obtient un vainqueur qu'il préférait dans son ordre initial. Il ne reste donc que le cas 4.

31.Lemme

Soit $\mathcal{P} = (P_1, \cdots, P_i, \cdots, P_n)$ un profil, G une FCC *unanime et non manipulable et un candidats b.*
Si il existe un candidat c tel que : $\forall i \in V : cP_ib$, alors $G(\mathcal{P}) \neq b$.

Autrement dit un candidat b devancé dans la préférence de chaque électeur par un même candidat c ne saurait être vainqueur. On dira que b est bloqué par c.

DEMONSTRATION :

Soit un profil $\mathcal{P}'$ dans lequel c est placé en tête par chaque votant. Par unanimité $G(\mathcal{P}') = c$. Si chaque votant modifie le rang de c, tout en le maintenant au dessus du rang de b pour obtenir le profil $\mathcal{P}$. il se peut que c perde sa couronne, mais pas au profit de b qui ne le dépasse pas en passant de $\mathcal{P}'$ à $\mathcal{P}$.

32.Lemme : unanimité étendue

Une fonction de choix collectif G qui vérifie les propriétés U et NM vérifie aussi l'unanimité étendue (UE) :
pour tout profil de préférences $\mathcal{P} = (P_1, \cdots, P_i, \cdots, P_n)$ et tout ensemble non vide de candidats $B \subseteq A$, si les candidats de B sont en tête dans chaque liste de préférence P_i, alors $G(\mathcal{P}) \in B$.

REMARQUE :

Ce résultat est évident lorsque $|B| = 1$ ou $B = A$.

DEMONSTRATION :

Soit un profil $\mathcal{P} = (P_1, \cdots, P_i, \cdots, P_n)$ tel que les candidats de B sont en tête de chaque P_i. Soit $x = G(\mathcal{P})$. Supposons $x \notin B$. Soit $b \in B$. Si dans chaque P_i, on modifie l'ordre des éléments de B (lesquels sont en tête, donc avant x) pour placer b en premier, on obtient un nouveau profil $\mathcal{P}'$ et par unanimité $G(\mathcal{P}') = b$. Mais en passant de $\mathcal{P}$ à $\mathcal{P}'$, b n'a jamais dépassé x en contradiction avec le lemme 31.

33. Théorème de Gibbard-Satterthwaite

Toute FCC unanime et non manipulable avec au moins 3 candidats et 3 votants est dictatoriale.

Nous allons proposer deux démonstrations

DEMONSTRATION DIRECTE :

Cette démonstration est fondée sur la méthode du « pivot ». Initialement conçue par J. Geanakoplos pour démontrer le théorème d'Arrow, elle a été adaptée par d'autres auteurs[9] pour démontrer le Théorème de Gibbard-Satterthwaite.

Soit a, b deux candidats distincts. On notera $\mathcal{P}_0$ un profil où tous les votants placent a en premier et b en dernier ; par unanimité $G(\mathcal{P}_0) = a$. Maintenant, on suppose que successivement chaque votant place b en tête et b en deuxième. À la fin du processus, on se retrouve avec un profil $\mathcal{P}_n$ où tous les votants placent b en premier et a en deuxième et, par unanimité, $G(\mathcal{P}_n) = b$. D'une étape à la suivante, b est le seul à dépasser a et par là être à même de lui voler la victoire On appellera <u>pivot</u> le premier votant r qui fait basculer de la victoire de a à la victoire de b.

$\mathcal{P}_{r-1}$

Votants				
1	b	a	$\cdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
$r-1$	b	a	$\cdots$	
$\boldsymbol{r}$	a	$\cdots$		b
$r+1$	a	$\cdots$		b
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$
n	a		$\cdots$	b

$G(\mathcal{P}_{r-1}) = a$

$\mathcal{P}_r$

Votants				
1	b	a	$\cdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
$r-1$	b	a	$\cdots$	
$\boldsymbol{r}$	b	a	$\cdots$	
$r+1$	a		$\cdots$	b
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$
n	a		$\cdots$	b

$G(\mathcal{P}_r) = b$

On modifie le profil $\mathcal{P}_r$ pour obtenir les profils suivants :

$\mathcal{P}^2$

Votants					
1	b	$\cdots$		$\cdots$	a
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$
$r-1$	b	$\cdots$		$\cdots$	a
$\boldsymbol{r}$	a	b	$\cdots$	$\cdots$	
$r+1$	$\cdots$	$\cdots$		a	b
$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$
n	$\cdots$	$\cdots$		a	b

$G(\mathcal{P}^2) = a$

$\mathcal{P}^1$

Votants					
1	b	$\cdots$		$\cdots$	a
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$
$r-1$	b	$\cdots$		$\cdots$	a
$\boldsymbol{r}$	b	a	$\cdots$	$\cdots$	a
$r+1$	$\cdots$			a	b
$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$
n	$\cdots$			a	b

$G(\mathcal{P}^1) = b$

Justification :

- ✓ De $\mathcal{P}_r$ à $\mathcal{P}^1$, le vainqueur b n'est dépassé par personne et conserve la victoire : $G(\mathcal{P}^1) = b$
- ✓ De $\mathcal{P}^1$ à $\mathcal{P}^2$, le vainqueur b n'est dépassé que par a. Donc $G(\mathcal{P}^2) = b$ ou a . Supposons que ce soit b. On peut alors observer que le passage de $\mathcal{P}^2$ à $\mathcal{P}_{r-1}$ s'opère sans que a ne dépasse b. On aurait alors $G(\mathcal{P}_{r-1}) \neq a$ .. Contradiction.

---

[9] Philip J. Reny, Jean-Pierre. Benoît, (voir bibliographie).

Maintenant, on fait intervenir un troisième larron c qui apparaît dans le profil suivant :

$\mathcal{P}^3$

Votants					
1		$\cdots$	c	b	a
$\vdots$			c	$\vdots$	$\vdots$
$r-1$		$\cdots$	c	b	a
$\boldsymbol{r}$	a	c	b	$\cdots$	
$r+1$		$\cdots$	c	a	b
$\vdots$			c	$\vdots$	$\vdots$
n		$\cdots$	c	a	b

$$G\left(\mathcal{P}^3\right)=a$$

Justification :

- ✓ De $\mathcal{P}^2$ à $\mathcal{P}^3$, le vainqueur a dépassé par aucun autre candidat garde sa couronne.

Enfin, un dernier profil :

$\mathcal{P}^4$

Votants					
1		$\cdots$	c	b	a
$\vdots$			c	$\vdots$	$\vdots$
$r-1$		$\cdots$	c	b	a
$\boldsymbol{r}$	a	c	b	$\cdots$	
$r+1$		$\cdots$	c	b	a
$\vdots$			c	$\vdots$	$\vdots$
n		$\cdots$	c	b	a

$$G\left(\mathcal{P}^4\right)=a$$

Justification :

- ✓ De $\mathcal{P}^3$ à $\mathcal{P}^4$, le vainqueur a n'est dépassé que par b. Mais ce dernier bloqué par c ne saurait être vainqueur. Et a conserve encore sa couronne.

Maintenant, soit un profil $\mathcal{P}$ dans lequel le votant r place le candidat a en tête. Il peut se déduire du profil $\mathcal{P}^4$ en permutant les lignes $\neq r$ et en permutant la ligne r sauf a. Or dans ces modifications, aucun candidat ne dépasse a. Donc $G(\mathcal{P})=G\left(\mathcal{P}^4\right)=a$.

Autrement dit quelque soit les choix des votants $1\cdots r-1,\ r+1\cdots n$, si le votant pivot r met a en tête, c'est son choix qui s'impose.

Comme a désigne n'importe quel candidat, le choix du votant pivot r s'impose toujours ce qui en fait un dictateur.

Demonstration a partir du theoreme d'Arrow :

Le principe sera le suivant : à partir d'une FCC G, construire une FPC F à laquelle on pourra appliquer le théorème d'Arrow.

On fixe, une fois pour toutes, une préférence P sur les éléments de A. Pour toute partie non vide $B \subseteq A$ et tout profil, $\mathcal{P}=\left(P_1,\cdots,P_i,\cdots,P_n\right)$ on définit $\mathcal{P}_B$ le profil obtenue en plaçant en tête de chaque P_i les éléments de B <u>sans modifier leur ordre relatif</u> et de ranger les autres selon l'ordre P.

Pour tout profil $\mathcal{P}$, on va définir à partir de la FCC G une relation binaire $F(\mathcal{P})$ sur A de la façon suivante :

$$\text{pour } x \neq y\,,\ x\,F(\mathcal{P})\,y \text{ si et seulement si } x=G\left(\mathcal{P}_{\{x,\,y\}}\right)$$

1 $F(\mathcal{P})$ est totale et antisymétrique.

Dans $\mathcal{P}_{\{x,\,y\}}$, x et y sont tête pour tout votant i. D'après l'unanimité étendue $x = G\left(\mathcal{P}_{\{x,\,y\}}\right)$ ou $y = G\left(\mathcal{P}_{\{x,\,y\}}\right)$. Donc soit $x F(\mathcal{P}) y$, soit $y F(\mathcal{P}) x$.

2 $F(\mathcal{P})$ est transitive

Soit 3 candidats distincts x, y et z. Selon l'unanimité étendue $G\left(\mathcal{P}_{\{x,\,y,\,z\}}\right) \in \{x, y, z\}$. Supposons que ce soit x. Alors :

- ✓ En passant du profil $\mathcal{P}_{\{x,\,y,\,z\}}$ au profil $\mathcal{P}_{\{x,\,y\}}$, y ne dépasse pas x. Donc $G\left(\mathcal{P}_{\{x,\,y\}}\right) = x$ et $x F(\mathcal{P}) y$
- ✓ Pour la même raison, $G\left(\mathcal{P}_{\{x,\,z\}}\right) = x$ et $x F(\mathcal{P}) z$

Dès lors, que $y F(\mathcal{P}) z$ ou $z F(\mathcal{P}) y$, la transitivité est assurée.

$F(\mathcal{P})$, relation d'ordre total strict, définit donc une préférence et l'application $F : \mathcal{P} \mapsto F(\mathcal{P})$ associée à la FCC G est une FPC.

Soit $x = G(\mathcal{P})$ et y un autre candidat. En passant du profil $\mathcal{P}$ au profil $\mathcal{P}_{\{x,\,y\}}$ Le candidat y ne dépasse pas le candidat x. Donc $G\left(\mathcal{P}_{\{x,\,y\}}\right) = x$ et $x F(\mathcal{P}) y$ et x est en tête de $F(\mathcal{P})$.

Il reste à montrer que F vérifie :

1. L'unanimité

   Soit un profil, $\mathcal{P} = \left(P_1, \cdots, P_i, \cdots, P_n\right)$ et deux candidats distincts x, y tels que $V_{x,y}(\mathcal{P}) = V$ (autrement dit, pour tout votant i, $x P_i y$). Alors dans $\mathcal{P}_{\{x,\,y\}}$, x est toujours en tête. Donc par unanimité de G, $x = G\left(\mathcal{P}_{\{x,\,y\}}\right)$ et par conséquent $x F(\mathcal{P}) y$.

2. L'indépendance

   Soit 2 profils $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ et deux candidats distincts x, y tels que $V_{x,y}(\mathcal{P}) = V_{x,y}(\mathcal{P}')$ (autrement dit, dans les 2 profils les mêmes votants placent x devant y). Puisque dans $\mathcal{P}_{\{x,\,y\}}$, comme dans $\mathcal{P}'_{\{x,\,y\}}$, les candidats autres que x, y sont rangées de la même façon selon l'ordre P, alors $\mathcal{P}_{\{x,\,y\}} = \mathcal{P}'_{\{x,\,y\}}$. Donc $x = G\left(\mathcal{P}_{\{x,\,y\}}\right) \Leftrightarrow x = G\left(\mathcal{P}'_{\{x,\,y\}}\right)$ et par suite : $x F(\mathcal{P}) y \Leftrightarrow x F(\mathcal{P}') y$.

On est donc fondé à appliquer le théorème d'Arrow pour conclure à l'existence d'un dictateur pour la FPC F. Il existe donc un votant i tel que, pour tout profil $\mathcal{P}$, $F(\mathcal{P}) = P_i$. Et comme $G(\mathcal{P}) = P_i(1)$, le votant i est aussi un dictateur pour G.

Restriction du domaine des profils

Dans les commentaires du théorème d'Arrow, il a été souligné que dans des situations de « polarisation » des votants, certaines préférences pouvaient être considérées comme non réalistes. Il existe plusieurs manières de restreindre le domaine des préférences pour tenir compte de cette « polarisation ». En voici une :

Croisement[10]

Soit $V = \{1, 2, \cdots, n\}$ l'ensemble des votants et $A = \{1, 2, \cdots, p\}$ l'ensemble des candidats. Pour simplifier les écritures, on supposera que les numéros identifiant les candidats (resp. les votants) traduisent leur

[10] Une autre méthode consiste à se restreindre aux préférences dites « à pic unique ».

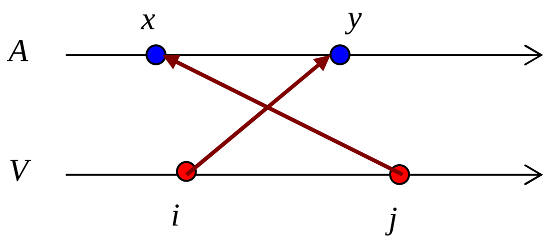
positionnement. Ainsi 1 est le candidat le plus à « gauche » et p le plus à « droite ». De même pour les votants.

34.Définition

Un profil $\mathcal{P}=(P_1,\cdots,P_i,\cdots P_n)$, *admet un croisement si et seulement si il existe :*

- ✓ *2 votants* i, j, *avec* $i<j$,
- ✓ *2 candidats* x, y, *avec* $x<y$,

tels que : $y P_i x$ *et* $x P_j y$.



COMMENTAIRE :

Cette situation illustrée par le schéma ci-dessus peut être considérée comme une anomalie puisqu'elle voit le votant de « gauche » (i) préférer un candidat (y) plus à « droite » que celui (x) préféré par le votant de « droite »(j).

La proposition suivante montre alors tout l'intérêt des se restreindre aux profils sans croisements.

35.Proposition

Pour un profil $\mathcal{P}=(P_1,\cdots,P_i,\cdots P_n)$ *sans croisement, avec* n *impair, il existe un vainqueur de Condorcet.*

DEMONSTRATION :

Si $n=2k-1$, alors k est la médiane de $1,2,\cdots,2k-1$ et le votant correspondant peut être désigné comme « électeur médian ». Nous allons montrer que le candidat préféré $P_k(1)$ de cet électeur médian est le vainqueur de Condorcet.

Soit $x=P_k(1)$ et un candidat $y\neq x$. On a, bien sûr, $xP_k y$. Distinguons 2 cas :

1. $x<y$. Dans ce cas les $k-1$ votants $1,2,\cdots,k-1$, « à gauche » de k ne peuvent préférer y à x, sans créer un croisement. Donc $\left|V_{x,y}(\mathcal{P})\right|\geq k$.
2. $y<x$. Dans ce cas les $k-1$ votants $k+1,k+2,\cdots,2k-1$, « à droite » de k ne peuvent préférer y à x, sans créer un croisement. Donc $\left|V_{x,y}(\mathcal{P})\right|\geq k$.

Dans tous les cas $\left|V_{x,y}(\mathcal{P})\right|>\left|V_{y,x}(\mathcal{P})\right|$ et donc $x\succ y$. Le candidat x battant tous les autres est le vainqueur de Condorcet.

Prolongements

Une autre piste : la préférence moyenne

Peut-on envisager, une méthode fondée sur l'idée de moyenne des préférences individuelles ? La réponse est positive si l'on se souvient que chaque préférence $P\in S_p$ est une permutation à laquelle on peut bijectivement associer une matrice de permutation $M(P)\in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ Et dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, les calculs de moyenne sont réalisables. Nous allons revisiter ici une méthode proposée par BLIN JM. et prolongée par TAKOUDA P.

Rappels :

- ✓ Une matrice de permutation est une matrice dont les termes sont 0 ou 1, avec un et un seul 1 sur chaque ligne et chaque colonne. L'ensemble des matrices de permutation est un groupe pour la multiplication matricielle.
- ✓ Les matrices de permutations sont orthogonales : $M(P)^{-1}=M(P)^t$.
- ✓ L'application : $P\mapsto M(P)$ est un isomorphisme de $\left(S_p,\circ\right)$ vers le groupe des matrices de permutation. En particulier : $M(P\circ P')=M(P)\times M(P')$ et $M\left(P^{-1}\right)=\left(M(P)\right)^{-1}$.
- ✓ $M(P)_{i,j}=\begin{cases}1 \text{ si } i=P(j)\\ 0 \text{ sinon}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1 \text{ si } i \text{ occupe le rang } j\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$.

  Par exemple, si $P=\left(3,1,2\right)$, alors $M(P)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$.

36.Définition

Soit $\mathcal{P}=\left(P_1,\cdots,P_n\right)$ un profil ou la situation de vote. On appelle matrice d'agrément associée à ce profil (ou à cette situation) la matrice $A\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ définie par :

$$A=\sum_{k=1}^{n}M(P_k) \quad ou \quad A=\sum_{P\in S_p}n_P M(P).$$

REMARQUE :

Les 2 définitions (à partir du profil ou de son résumé) sont clairement équivalentes. Il en ressort que la méthode que nous allons développer respecte l'anonymat.

37.Proposition

La matrice d'agrément A associé à $\mathcal{P}$ n'est autre que la matrice de Borda.

DEMONSTRATION :

Pour un votant k de préférence P_k, $M\left(P_k\right)_{i,j}=1$ si et seulement si le votant k place le candidat i au rang j. Comme $A=\sum_{k=1}^{n}M(P_k)$, $A_{i,j}$ est égal au nombre de 1 ligne i, colonne j dans les matrices $M(P_k)$, ce qui est donc le nombre de votants qui placent le candidat i au rang j.

38. Définition

Soit A la matrice d'agrément associée à un profil $\mathcal{P}$, on appelle matrice d'agrément normalisée la matrice $\widetilde{A} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ définie par :

$$\widetilde{A} = \frac{1}{n} A = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} M(P_k) = \frac{1}{n} \sum_{P \in S_p} n_P M(P)$$

On retrouve bien dans cette définition la notion de moyenne. Mais avec un hic, cette moyenne n'est pas une matrice de permutation. Elle possède cependant une propriété importante : il s'agit d'une matrice bistochastique.

39. Définition

Une matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est dite bistochastique si et seulement si elle vérifie les propriétés :

1. *ses termes sont positifs ou nuls*
2. $MU^t = U^t$
3. $UM = U$

où $U = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$.

Les propriétés 2 et 3 expriment le fait que la somme de chaque ligne (resp. chaque colonne) de M est égal à 1.

À leur sujet, on dispose du théorème suivant :

40. Théorème de Birkhoff-Von Neuman

M bistochastique $\Leftrightarrow M$ est une moyenne de matrices de permutation.

Autre formulation :

L'ensemble des matrices bistochastiques est l'enveloppe convexe de l'ensemble des matrices de permutation.

DEMONSTRATION :

L'implication dans le sens $\Rightarrow$ est assez difficile à démontrer[11] (voir ..). En revanche dans le sens $\Leftarrow$, qui suffit à nos besoins ici, c'est assez simple :

Remarquons que les matrices de permutation sont bistochastiques.

Soit alors $P_1, \cdots, P_n$ des matrices de permutation et $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ des coefficients positifs tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ et soit $M = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_i$, alors M est évidemment à termes positifs et de plus :

$MU^t = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_i U^t = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i U^t = U^t$ et $UM = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i U P_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i U = U$.

41. Corollaire

La matrice d'agrément $\widetilde{A}$ normalisée associée à un profil $\mathcal{P}$ est bistochastique.

À partir de là le problème se ramène à :

Déterminer une matrice de permutation $M(P)$ qui soit la plus proche de $\widetilde{A}$.

Ou pour être plus précis :

---

[11] Pour des compléments sur les matrices bistochastiques, on peut se référer à [X] Chapitre X Problème 7.

Déterminer une matrice de permutation $M(P)$ telle que $\left\|\widetilde{A}-M(P)\right\|^2$ .minimum.

Et pour être plus précis encore, il convient de spécifier la norme matricielle $\| \ \|$ utilisée. Nous proposons d'employer la norme de Frobenius.

Rappels[12] *:*

- ✓ La trace définie par : $Tr(M)=\sum_{i=1}^{p} M_{i,i}$ est une forme linéaire sur linéaire $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Elle vérifie la propriété dite de « commutation sous trace » : $Tr(M\,N)=TR(N\,M)$.
- ✓ Sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, l'application de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})\times\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $(M,N)\mapsto Tr(M^t N)$ est un produit scalaire notée $\langle M;N\rangle$.
- ✓ La norme euclidienne qui en dérive définie par : $\|M\|^2=\langle M;M\rangle=Tr\left(M^t M\right)=Tr\left(M\,M^t\right)$ est une norme matricielle dite norme de Frobenius.

On a donc :

$$\left\|\widetilde{A}-M(P)\right\|^2=\left\langle \widetilde{A}-M(P);\widetilde{A}-M(P)\right\rangle=\left\langle \widetilde{A};\widetilde{A}\right\rangle+\left\langle M(P);M(P)\right\rangle-2\left\langle M(P);\widetilde{A}\right\rangle$$

Or :

- ✓ $\left\langle \widetilde{A};\widetilde{A}\right\rangle$ est constant,
- ✓ $\left\langle M(P);M(P)\right\rangle=Tr\left(M(P)^t M(P)\right)=Tr\left(I_p\right)=p$, est aussi constant.

Le problème est donc équivalent à :

Déterminer une permutation P telle que $\left\langle M(P);\widetilde{A}\right\rangle$ maximum

Ou encore :

Déterminer une permutation P telle que $\left\langle M(P);A\right\rangle$ maximum

Or $\left\langle M(P);A\right\rangle=Tr\left(M(P)^t A\right)=\sum_{j=1}^{p} A_{P(j),j}$. Comme, les coefficients de A sont entiers, on est donc en présence du problème du couplage maximum avec A comme matrice d'affinité tel qu'il est présenté dans le document « *math_matrimoniales4_couplageopti.pdf* » et résolu par l'algorithme hongrois.

Avec $A=\begin{pmatrix} 24 & 12 & 25 \\ 19 & 31 & 11 \\ 18 & 18 & 25 \end{pmatrix}$, la solution est $P=(1,2,3)$ pour laquelle $\sum_{j=1}^{3} A_{P(j),j}=24+31+25=80$

Problème : sur ce profil, Borda donne comme solution $(2,1,3)$ et Condorcet n'en donne pas ! Mais fait cependant pencher la balance du côté de la solution $(1,2,3)$ puisqu'il donne $1\succ 2$.

Un autre problème va surgir avec l'exemple suivant : $A=\{1,2,3\}$ et la situation de vote $\widetilde{\mathcal{P}}$ suivante :

Ordres			Nombre de votants
1	*2*	*3*	19
1	*3*	*2*	10
2	*1*	*3*	2
2	*3*	*1*	17
3	*1*	*2*	5
3	*2*	*1*	2
		n =	**55**

[12] Pour des précisions sur les normes matricielles en général et la norme de Frobenius en particulier, on peut se référer à l'ouvrage [X] Chapitre VII.

représentée par la matrice :

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 19 \\ 1 & 3 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 17 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

La matrice d'agrément, alias matrice Borda est :

```
A:=borda(S);
```

$$A := \begin{bmatrix} 29 & 7 & 19 \\ 19 & 21 & 15 \\ 7 & 27 & 21 \end{bmatrix}$$

L'algorithme hongrois donne la solution :

- ✓ $P = (1,2,3)$ pour laquelle : $\sum_{j=1}^{3} A_{P(j),j} = 29 + 21 + 21 = 71$,

mais aussi :

- ✓ $P' = (1,3,2)$ pour laquelle : $\sum_{j=1}^{3} A_{P'(j),j} = 29 + 27 + 15 = 71$.

Que disent dans ce cas les pères fondateurs ?

Condorcet :

```
cond2(S);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pas de paradoxe, la solution est : $P = (1,2,3)$.

Borda :

```
multiply(A,transpose(B));
```

$$\begin{bmatrix} 65 \\ 59 \\ 41 \end{bmatrix}$$

En accord cette fois avec Condorcet.

Cette méthode est certes mathématiquement séduisante, mais cette absence d'unicité de la solution s'avère génante lorsqu'il s'agit de déterminer <u>une</u> préférence collective[13]. Dommage, mais l'excursion du coté de l'algèbre linéaire n'était pas sans intérêt…

La méthode de Schulze

On aurait pu penser que le théorème d'Arrow ait refroidi les ardeurs des fabricants de système de vote. Il n'en est rien. De nombreuses méthodes ont depuis été proposées depuis. Nous ne nous proposons pas de dresser un inventaire comparatif de ces différentes méthodes (Ranked pairs, Copeland, Kemeny-

[13] Mais, on pourra rappeler que toutes les méthodes évoquées, peuvent dans certaines situations ne fournir aucun résultat ou plusieurs. L'autre question serait d'examiner les propriétés de cette méthode.

Young, MiniMax,…), ni non plus d'examiner les nombreuses propriétés qu'elles sont ou non susceptibles de satisfaire. Nous nous contenterons d'en présenter une récente : la méthode conçue par un étudiant en mathématiques et physique allemand, Markus Schulze en 1997. Cette dernière a reçue un écho favorable, notamment dans diverses organisations de la constellation du logiciel libre (Wikipedia, Debian,…)

La démarche

Le point de départ est une situation de vote $\widetilde{\mathcal{P}}$ et la matrice de Condorcet $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ de type 1 qui résume les résultats des duels.

Partant de C, on définit la matrice $G \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ par : $G_{i,j} = \begin{cases} C_{i,j} - C_{j,i} \text{ si } C_{i,j} > C_{j,i} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. Cette définition est une variante de la définition de la matrice de Condorcet de type 2 C'. Mais la matrice G porte plus d'information que la matrice C' : elle ne se contente pas de dire que i l'emporte sur j, mais elle précise alors de combien de voix.

Soit Γ le graphe orienté valué défini par cette matrice :

- ✓ A est l'ensemble de ses sommets,
- ✓ Pour $i, j \in A$, il existe une flèche $i \xrightarrow{G_{i,j}} j$ valuée par $G_{i,j}$ de la source i vers le but j si et seulement si : $G_{i,j} > 0$

On pose alors la définition suivante :

42.Définition

Pour un chemin $ch = a_1 \xrightarrow{G_{a_1,a_2}} a_2 \longrightarrow \cdots\cdots a_{k-1} \xrightarrow{G_{a_{k-1},a_k}} a_k$ *dans* Γ *avec* $a_1 \neq a_k$, *on appellera force du chemin et on notera* $f(ch) = \min_{i=1\cdots k-1}\left(G_{a_i,a_{i+1}}\right)$

La force du chemin est donc définie comme la valeur de son maillon le plus faible. Par définition $f(ch) > 0$.

43.Définition

On appellera matrice de Schulze la matrice $Z \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ *définie par :*

$$Z_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i = j \text{ ou s'il n'existe pas de chemin de } i \text{ vers } j \\ \max\limits_{\substack{\text{source de } ch=i \\ \text{but de } ch=j}} \left(f(ch)\right) \text{ sinon} \end{cases}$$

Autrement dit, pour $i \neq j$, $Z_{i,j}$ *est la force maximale d'un chemin de* i *vers* j *s'il en existe.*

L'idée sous-jacente de la méthode de Schulze est de ne pas se limiter comme le fait celle de Condorcet aux duels entre candidats, mais de prendre aussi en compte des confrontations « indirectes » telles : i bat j avec un écart de x voix et j bat k avec un écart de y voix.

Une procédure pour calculer cette matrice fondée sur l'algorithme de Floyd sera présentée en aval.

À l'instar de la matrice de Condorcet cette matrice de Schulze permet de définir, outre la relation $\succ$ définie par Condorcet, une nouvelle relation binaire $\rhd$ sur A par :

$$i \rhd j \text{ si et seulement si } Z_{i,j} > Z_{j,i}.$$

Cette relation vérifie l'antisymétrie : $i \rhd j \Rightarrow Non(j \rhd i)$. Mais rien ne permet d'affirmer qu'elle est totale.

44.Définition

On appelle vainqueur de Schulze, tout candidat i, tel que $i \rhd j$ *pour* $i \neq j$.

REMARQUE :

Si il existe un vainqueur de Schulze, il est unique.

EXEMPLE :

En reprenant l'exemple qui conduisait à la matrice de Condorcet : $C = \begin{pmatrix} 0 & 34 & 26 \\ 27 & 0 & 42 \\ 35 & 19 & 0 \end{pmatrix}$

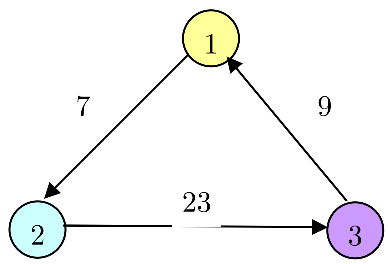
MATRICES

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 23 \\ 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

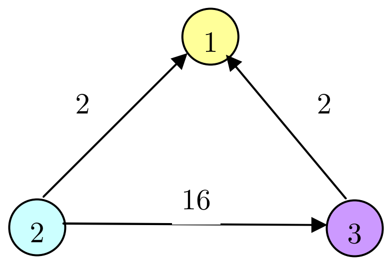
$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 7 \\ 9 & 0 & 23 \\ 9 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

GRAPHES

Graphe Γ



Graphe de la relation $\rhd$



On remarque, sur cet exemple, qu'à l'encontre de la méthode de Condorcet, la méthode de Schulze couronne 2 comme vainqueur et produit même une préférence collective $(2,3,1)$. Elle résout la non transitivité de la relation $\succ$

45.Proposition

1. *S'il existe un vainqueur de Condorcet, il est aussi vainqueur de Schulze.*
2. *Si la relation* $\succ$ *de Condorcet est une préférence, il en est de même pour la relation* $\rhd$ *de Schulze.*

DEMONSTRATION :

1. Soit i le vainqueur de Condorcet. Donc, pour tout $j \neq i$, $G_{i,j} > 0$ et $G_{j,i} = 0$. Par conséquent, dans le graphe Γ, il n'existe pas de flèches aboutissant à i. Donc il n'existe pas de chemin de j vers i. D'où $Z_{j,i} = 0$.

   Sur l'autre versant, $i \xrightarrow{G_{i,j}} j$ est un chemin de i vers j de force $G_{i,j}$. Donc $Z_{i,j} \geq G_{i,j} > 0$. Il en résulte que $Z_{i,j} > Z_{j,i}$, ce qui équivaut à $i \rhd j$.
2. Pour faciliter les écritures dans la démonstration de cette deuxième assertion, nous supposerons que la préférence produite par la méthode de Condorcet est : $(1, 2, \cdots, p)$. Le raisonnement est le même :

si i bat au sens de Condorcet $j = i+1, \cdots, p$, alors, il n'existe pas dans Γ de chemins issues de j aboutissant à i. Donc alors $Z_{i,j} > Z_{j,i} = 0$, ce qui équivaut à $i \rhd j$.

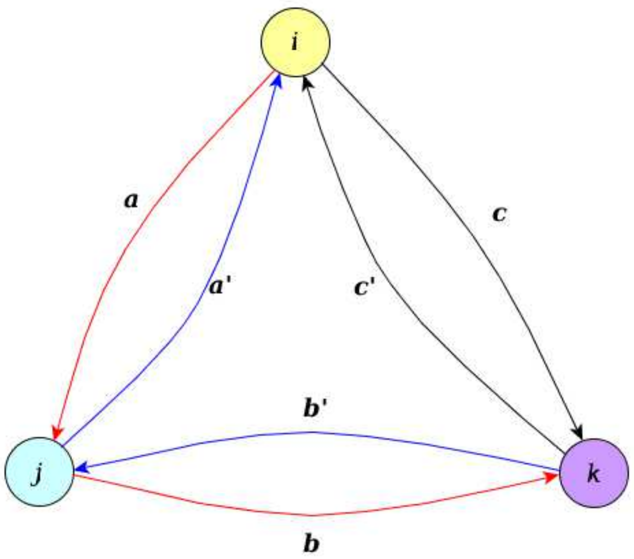
COMMENTAIRE

Donc lorsque la méthode de Condorcet « fonctionne », la méthode de Schulze dit la même chose. Mais l'exemple présenté en amont montre qu'elle peut trancher quand Condorcet ne le peut.

46.Proposition

La relation $\rhd$ sur A est transitive.

DEMONSTRATION :



Soit trois candidats distincts $i, j, k \in A$. On notera, pour tout $x, y, z \in \{i, j, k\}$ distincts :

- ✓ $ch_{x\to y}$ un chemin de force maximale de x vers y. On a donc : $f\left(ch_{x\to y}\right) = Z_{x,y}$ (1)
- ✓ $ch_{x\to y\to z}$ le chemin obtenu par concaténation des chemins $ch_{x\to y}$ et $ch_{y\to z}$. On a donc :
  - par définition de f : $f\left(ch_{x\to y\to z}\right) = \min\left(f\left(ch_{x\to y}\right), f\left(ch_{y\to z}\right)\right)$ (2).
  - par définition de Z : $f\left(ch_{x\to y\to z}\right) \le Z_{x,z}$ (3).

Pour alléger les écritures, on pose (voir schéma) :

$$f\left(ch_{i\to j}\right) = a \qquad f\left(ch_{j\to i}\right) = a'$$
$$f\left(ch_{j\to k}\right) = b \qquad f\left(ch_{k\to j}\right) = b'$$
$$f\left(ch_{i\to k}\right) = c \qquad f\left(ch_{k\to i}\right) = c'$$

En appliquant (1), (2), (3) aux différents chemins :

$$a \ge \min\left(c, b'\right) \ (8) \qquad a' \ge \min\left(c', b\right) \ (9)$$
$$b \ge \min\left(c, a'\right) \ (10) \qquad b' \ge \min\left(c', a\right) \ (11)$$
$$c \ge \min\left(a, b\right) \ (12) \qquad c' \ge \min\left(a', b'\right) \ (13)$$

On a les équivalences suivantes :

$$i \rhd j \text{ et } j \rhd k \Leftrightarrow Z_{i,j} > Z_{j,i} \text{ et } Z_{j,k} > Z_{k,j} \Leftrightarrow a > a' \text{ et } b > b'.$$

En supposant : $i \rhd j$ et $j \rhd k$, on a donc :

$a > a' \ge \min\left(c', b\right)$ (14) et $b > b' \ge \min\left(c', a\right)$ (15)

1. Si $a \geq b$, on a donc d'une part selon (12) $c \geq b$ et de l'autre $\min(c', a) = c'$, sinon contradiction avec (15). (11) implique $b' \geq c'$. Donc finalement : $c \geq b > b' \geq c'$.
2. Si $b \geq a$, on a donc d'une part selon (12) $c \geq a$ et de l'autre $\min(c', b) = c'$ sinon contradiction avec (14). (9) implique $a' \geq c'$. Donc finalement : $c \geq a > a' \geq c'$.

Donc, dans les deux cas, $c > c'$, ce qui équivaut à $i \rhd k$.

Procédures de détermination de la matrice Z

Code Maple

Partant de la matrice de Condorcet C, une première procédure permet de calculer la matrice G :

```
condorcet3:=proc(C::matrix)
local i,j, p:: integer, C3::matrix;
p:=coldim(C);
C3:=matrix(p,p,(i,j)->0);
for i from 1 to p do
   for j from 1 to p do
   if C[i,j]>C[j,i] then C3[i,j]:=C[i,j]-C[j,i]; fi;
   od;
od;
RETURN(evalm(C3));
end:
```

La complexité de cette procédure est en $O\left(p^2\right)$.

Une deuxième procédure fondée sur l'algorithme de Floyd modifié, permet, à partir de *G*, de calculer la matrice de Schulze Z.

```
schulze:=proc(G::matrix)
local i,j,k, p:: integer,Z::matrix;
p:=coldim(G);
Z:=copy(G);
for k from 1 to p do
    for i from 1 to p do
    if i=k then next fi;
        for j from 1 to p do
        if j=k then next fi;
        if i=j then next fi;
        Z[i,j]:=max(Z[i,j],min(Z[i,k],Z[k,j]));
        od;
    od;
od;
RETURN(evalm(Z));
end:
```

Correction de l'algorithme de Schulze

Le principe consiste à prendre successivement $k = 1 \cdots p$ comme « pivot » et à regarder, pour tout couple (i, j) distincts, si un chemin passant par le pivot *k* améliore la force du chemin.

Considérons l'assertion $\mathcal{H}_k$ suivante :

> À l'issue de l'exécution de la boucle `k`, pour tout `i, j` distincts `Z[i,j]` est égal à la force maximale d'un chemin de `i` vers `j` en passant des sommets de `{1, …, k}`

1. $\mathcal{H}_1$ est vraie. Initialement `Z[i,j]=G[i,j]`. Si dans les boucles internes, un chemin entre `i` et `j` passant par `1` se révèle d'une force supérieure à celle du chemin direct, cette meilleure valeur est affectée à `Z[i,j]`.
2. $\mathcal{H}_{k-1} \Rightarrow \mathcal{H}_k$ (pour $k = 2 \cdots p$). Selon l'hypothèse de récurrence, au début de l'exécution de la boucle `k` :

- ✓ `Z[i,j]` est égal à la force maximale d'un chemin de `i` vers `j` en passant par des sommets de `{1, ⋯, k-1}`.
- ✓ `Z[i,k]` est égal à la force maximale d'un chemin de `i` vers `k` en passant par des sommets de `{1, ⋯, k-1}`. Soit $ch_{i\to k}$ un tel chemin.
- ✓ `Z[k,j]` est égal à la force maximale d'un chemin de `k` vers `j` en passant par des sommets de `{1, ⋯, k-1}`. Soit $ch_{k\to j}$ un tel chemin.
- ✓ `min(Z[i,k],Z[k,j])` est la force du chemin du $ch_{i\to k\to j}$ obtenue par concaténation des deux chemins $ch_{i\to k}$ et $ch_{k\to j}$.

Au cours de l'exécution de la boucle `k`, si `min(Z[i,k],Z[k,j])> Z[i,j]`,.c'est donc que le chemin $ch_{i\to k\to j}$ est d'une force supérieure à tout chemin de `i` vers `j` en passant par des sommets de `{1, ⋯, k-1}` et alors cette nouvelle valeur est affectée à `Z[i,j]`. Donc à l'issue de l'exécution de la boucle k, `Z[i,j]` est égal à la force maximale d'un chemin de `i` vers `j` en passant par des sommets de `{1, ⋯, k}`.

$\mathcal{H}_p$ est donc vraie.

Complexité de l'algorithme

Compte tenu des trois boucles imbriquées, l'algorithme est en $O\left(p^3\right)$ où, rappelons le, $p=|A|$ est le nombre de candidats.

Exemple

Soit une situation de vote[14] ($p=|A|=5$ et $n=|V|=45$ représenté par la matrice :

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

```
C:=condorcet(S);
```

$$C := \begin{bmatrix} 0 & 20 & 26 & 30 & 22 \\ 25 & 0 & 16 & 33 & 18 \\ 19 & 29 & 0 & 17 & 24 \\ 15 & 12 & 28 & 0 & 14 \\ 23 & 27 & 21 & 31 & 0 \end{bmatrix}$$

```
G:=condorcet3(C);
```

$$G := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 7 & 15 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 21 & 0 \\ 0 & 13 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 0 & 17 & 0 \end{bmatrix}$$

[14] Cet exemple est tiré de l'article de Wikipedia consacré à la méthode de Schulze.

	A	B	C	D	E
A	0	0	7	15	0
B	5	0	0	21	0
C	0	13	0	0	3
D	0	0	11	0	0
E	1	9	0	17	0

On peut remarquer qu'aucune ligne ne contient 4 termes non nuls. Donc il n'existe pas de vainqueur de Condorcet.

```
Z:=schulze(G);
```

$$Z := \begin{bmatrix} 0 & 11 & 11 & 15 & 3 \\ 5 & 0 & 11 & 21 & 3 \\ 5 & 13 & 0 & 13 & 3 \\ 5 & 11 & 11 & 0 & 3 \\ 5 & 11 & 11 & 17 & 0 \end{bmatrix}$$

Le candidat 5 qui bat 1 par *5* à *3*, 2 et 3 par *11* à *3*, 4 par *17* à *3* est couronné vainqueur de Condorcet. De plus la relation $\rhd$ est une préférence : $5 \rhd 1 \rhd 3 \rhd 2 \rhd 4$.

REMARQUE :

On peut appliquer la procédure `condorcet3()` à la matrice `Z` pour mettre en évidence les résultats de Schulze :

```
condorcet2(Z);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Qualités et limites de la méthode

Cette méthode vérifie toute une série de « bonnes » propriétés (voir l'article de Markus Schulze à ce sujet). Sa mise en œuvre recourt à des procédures `condorcet()`, `condorcet3()`, `schulze()` de complexités polynomiales de degré ≤ 3.

La méthode de Schulze réduit la zone grise d'indécision de Condorcet, sans toutefois la faire disparaître. Pour certains profils, elle ne fournit ni préférence ni même <u>un</u> vainqueur. Le problème est que la relation $\rhd$ n'est pas nécessairement une relation totale. Lorsque $Z_{i,j} = Z_{j,i}$, on a ni $i \rhd j$, ni $j \rhd i$. Dans ce cas, il peut exister plusieurs « vainqueurs potentiels ».

C'est le cas pour la situation de vote :

$$S := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 30 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 20 \end{bmatrix}$$

laquelle conduit à une matrice de Schulze :

$$Z := \begin{bmatrix} 0 & 10 & 10 & 30 \\ 10 & 0 & 30 & 10 \\ 10 & 10 & 0 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

qui ne révèle aucun vainqueur.

Pour trancher entre ces aspirants à la couronne, Markus Schulze, propose dans cette situation, un stratagème auquel j'avoue n'avoir pas compris grand-chose, sinon qu'il recourt largement à des tirages au sort.

Mais cette méthode peut être affectée d'un étrange paradoxe que l'on va découvrir sur un exemple. Soit la situation de vote[15] représentée par la matrice :

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 7 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Conduisant à une matrice de Condorcet :

```
C:=condorcet(S);
```

$$C := \begin{bmatrix} 0 & 13 & 11 & 17 \\ 12 & 0 & 14 & 12 \\ 14 & 11 & 0 & 10 \\ 8 & 13 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

```
G:=condorcet3(C);
```

$$G := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice G ne montrant aucun vainqueur de Condorcet, on recourt à Schulze :

```
Z:=schulze(G);
```

$$Z := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

```
condorcet2(Z);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

On obtient la préférence : $2 \rhd 1 \rhd 4 \rhd 3$ et $\underline{2}$ est couronné comme vainqueur de Schultze.

[15] Cet exemple est tiré de l'article « *Participation criterion* » de Wikipedia.

Maintenant, on suppose que les 2 électeurs ayant comme préférence : $(1,2,3,4)$ décident de s'abstenir. La nouvelle situation de vote est représentée par la matrice :

$$S := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 7 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

```
C:=condorcet(S);
```

$$C := \begin{bmatrix} 0 & 11 & 9 & 15 \\ 12 & 0 & 12 & 10 \\ 14 & 11 & 0 & 8 \\ 8 & 13 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

```
G:=condorcet3(CP);
```

$$G := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice G ne montrant aucun vainqueur de Condorcet, on recourt à Schulze :

```
Z:=schulze(G);
```

$$Z := \begin{bmatrix} 0 & 3 & 7 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

```
condorcet2(Z);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

On obtient la préférence : $1 \rhd 4 \rhd 3 \rhd 2$ et $\underline{1}$ est couronné comme vainqueur de Schultze.

En s'abstenant les 2 électeurs ont provoqué la victoire de leur candidat favori $\underline{1}$!

Participation, abstention ?

La méthode de Schulze n'est pas la seule susceptible d'être atteinte par ce paradoxe. Selon un théorème de H. MOULIN, toute méthode compatible avec Condorcet, c'est-à-dire toute méthode conduisant au même vainqueur que Condorcet lorsqu'il en existe un, est sujette à ce paradoxe.

47.Définition

Une fonction de choix collectif G respecte le principe de <u>participation</u> si et seulement si pour tout profil $\mathcal{P}$ et tout profil $\mathcal{P}'$ obtenue par l'ajout d'un votant (ou de plusieurs) supplémentaire v de préférence P_v alors $G(\mathcal{P}')$ ne peut être situé dans P_v après $G(\mathcal{P})$.

Autrement dit en participant au vote v ne peut voir couronner un vainqueur moins bien classé par lui que le vainqueur couronné s'il s'abstenait.

Dans où la fonction G ne respecte pas cette règle, on dit aussi qu'elle est atteinte par le paradoxe de l'abstention[16].

Notation :

Pour tout profil $\mathcal{P}$ et tout candidat $y \in A$, on notera $s_y(\mathcal{P}) = \max\limits_{z \in A}\left(v_{z,y}(\mathcal{P})\right)$. Autrement dit, $s_y(\mathcal{P})$ est le plus fort « score » d'un candidat en duel avec y.

y est un vainqueur de Condorcet si et seulement si : $s_y(\mathcal{P}) < \frac{n}{2}$ (n nombre de votants)

48.Lemme

Soit G une fonction de choix collectif, respectueuse du principe de participation et compatible avec Condorcet. Pour tout profil $\mathcal{P}$, tous candidats y, x distincts :

$$s_y(\mathcal{P}) < v_{y,x}(\mathcal{P}) \Rightarrow G(\mathcal{P}) \neq x$$

DEMONSTRATION :

Sous les hypothèses de l'énoncé, supposons $G(\mathcal{P}) = x$, alors G étant compatible avec Condorcet, y ne peut être vainqueur de Condorcet, ce qui implique : $\frac{n}{2} \leq s_y(\mathcal{P})$.

Si l'on pose : $h = 2s_y - n + 1$, on a donc :

1. $0 < h$.
2. $s_y(\mathcal{P}) + \frac{1}{2} < v_{y,x}(\mathcal{P}) \Rightarrow \frac{2s_y(\mathcal{P})+1}{2} < v_{y,x}(\mathcal{P}) \Rightarrow \frac{h+n}{2} < v_{y,x}(\mathcal{P})$

Soit $\mathcal{P}'$ le profil obtenu en rajoutant au profil $\mathcal{P}$ h votants selon la préférence : $(x, y, \cdots)$. On alors :

- ✓ $v_{y,x}(\mathcal{P}') = v_{y,x}(\mathcal{P})$, puisque les nouveaux votants préfèrent x à y. Et, d'après 2. $\frac{h+n}{2} < v_{y,x}(\mathcal{P}')$, ce qui assure la victoire de y sur x puisque le profil $\mathcal{P}'$ compte $h+n$ votants.
- ✓ Pour z un candidat distinct de x et y, $v_{z,y}(\mathcal{P}') = v_{z,y}(\mathcal{P})$ puisque les nouveaux votants lui préfèrent y. Par définition de $s_y(\mathcal{P})$, $v_{z,y}(\mathcal{P}) < s_y(\mathcal{P})$. On a donc :

  $v_{z,y}(\mathcal{P}') \leq s_y(\mathcal{P}) \Rightarrow v_{z,y}(\mathcal{P}') \leq \frac{h+n-1}{2} \Rightarrow v_{z,y}(\mathcal{P}') < \frac{h+n}{2}$

  Ce qui assure avec ce nouveau profil la victoire de y sur z

Donc y est vainqueur de Condorcet du profil $\mathcal{P}'$ (*l'astuce a été de rajouter un nombre de nouveaux votants suffisants pour permettre à y de battre tous les z sans lui faire perdre son avantage sur x*).

Mais alors, il y a une contradiction avec le principe de participation, puisque ces nouveaux votants préférant x à y ne peuvent le détrôner x au profit de y. Donc $G(\mathcal{P}) \neq x$.

49.Théorème (Moulin)

Il n'existe pas de fonctions de choix collectif, respectueuse du principe de participation et compatible avec Condorcet.

DEMONSTRATION :

Supposons qu'il existe une telle fonction G, il suffit d'exhiber un exemple menant à une contradiction.

[16] Ce paradoxe est nommé en anglais« *non show paradox* ».

Soit la situation de vote $\widetilde{\mathcal{P}}$:

Ordres				Nombre de votants
A	D	C	B	3
A	D	B	C	3
D	B	C	A	5
B	C	A	D	4
				15

Conduisant à une matrice de Condorcet de type 1 :

	A	B	C	D
A	0	6	6	10
B	9	0	12	4
C	9	3	0	4
D	5	11	11	0
$s_y(\mathcal{P})$	9	11	12	10

En abrégeant $s_y(\mathcal{P})$ en s_y et $v_{y,x}(\mathcal{P})$ en $v_{y,x}$ par application du Lemme 45, on obtient :

- ✓ $s_A = 9$ et $v_{A,D} = 10 \Rightarrow G(\mathcal{P}) \neq D$
- ✓ $s_B = 11$ et $v_{B,C} = 12 \Rightarrow G(\mathcal{P}) \neq C$
- ✓ $s_D = 10$ et $v_{D,B} = 12 \Rightarrow G(\mathcal{P}) \neq B$

Le vainqueur ne peut être que A.

4 nouveaux électeurs participent avec comme préférence $CABD$. La nouvelle situation de vote est $\widetilde{\mathcal{P}}'$

Ordres				Nombre de votants
A	D	C	B	3
A	D	B	C	3
D	B	C	A	5
B	C	A	D	4
C	A	B	D	4
				19

Et la matrice de Condorcet :

	A	B	C	D
A	0	10	6	14
B	9	0	12	8
C	13	7	0	8
D	5	11	11	0
$s_y(\mathcal{P}')$	13	11	12	14

En abrégeant $s_y(\mathcal{P}')$ en s'_y et $v_{y,x}(\mathcal{P}')$ en $v'_{y,x}$ par application du Lemme 45, on obtient :

- ✓ $s'_A = 13$ et $v'_{A,D} = 14 \Rightarrow G(\mathcal{P}') \neq D$
- ✓ $s'_B = 11$ et $v'_{B,C} = 12 \Rightarrow G(\mathcal{P}') \neq C$
- ✓ $s'_C = 12$ et $v'_{C,A} = 13 \Rightarrow G(\mathcal{P}') \neq A$

Le vainqueur ne peut être que B. Mais les 4 nouveaux électeurs préfèrent A à B en contradiction avec le respect par G du principe de participation.

Références bibliographiques

Cette bibliographie ne vise pas à l'exhaustivité, mais simplement à fournir des références que nous avons consulté et qui ont nourri notre réflexion.

Livres

CELLIER J., *Algèbre Linéaire, des bases aux applications,* PUR, 2008.

MOULIN H., *The Strategy of Social Choice*, North Holland 1983.

ARROW K.J. *Social choice and individual values*, Wiley, New York ,1951, 1963

Articles (Téléchargeables sur Internet)

SCHULZE M., *A New Monotonic and Clone-Independent Single-Winner Election Method,* 2003.

BENOÎT J-P., *The Gibbard-Satterthwaite Theorem: a simple proof,* Mimeo, NYU

SEN A, *Another direct proof of the Gibbard-Satterthwaite Theorem*, Discussion Paper 00–09, Indian Statistical Institute, Delhi Centre, New Delhi, 2000.

RENY, P.J.,. *Arrow's theorem and the Gibbard–Satterthwaite theorem: a unified approach*, mimeo, 1999.

GIBBARD, A., *Manipulation of voting schemes : a general result*, Econometrica 41, 587–600, 1977.

WEBER T., *Alternatives vs. Outcomes: A Note on the Gibbard-Satterthwaite Theorem*, MPRA Paper No. 17836, 2009. http://mpra.ub.uni-muenchen.de/17836/.

WEBER T., *Alternatives vs. Outcomes: A Note on the Gibbard-Satterthwaite Theorem*, MPRA Paper No. 17836, 2009. http://mpra.ub.uni-muenchen.de/17836/.

MONJARDET B. *De Condorcet à Arrow via Guilbaud, Nakamura et les jeux simples*, Mathématiques et Sciences humaines n°163, 2003. http://www.ehess.fr/revue-msh/pdf/N163R917.pdf

MONJARDET B. *Sur diverses formes de la « règle de Condorcet » d'agrégation des préférences,* Mathématiques et Sciences humaines n°111, 1990.

http://www.ehess.fr/revue-msh/pdf/MSH_1990__111__61_0.pdf

MONJARDET B. *Une autre preuve du théorème d'Arrow*, RAIRO vol 12 n°3 1978.

GEHRLEIN W.V. LEPELLEY D. *The Value of Research Based on Simple Assumptions about Voters' Preferences*

BLIN JM *A linear assignment formulation of the multiattribute decision problem.* Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, vol 10 n° 2 (1976), http://archive.numdam.org/article/RO_1976__10_2_21_0.pdf

Table des matières

L'agrégation des préférences Enclos mathématique 1

Cadre formel 1
Propriétés souhaitables pour ces fonctions 2
Universalité 2
Anonymat 3
Neutralité 3
Unanimité 4
Indépendance 4

Les pères fondateurs 5
La méthode de Condorcet : les duels 5
Matrices de Condorcet 5
Minimum de désaccords et maximum d'accords 7
L'apparition du paradoxe de Condorcet est-elle rare ? 8
La méthode de Borda : les scores 11
Matrice de Borda 12
Manipulation des votes 13

Les théorèmes d'impossibilité 15
Théorème d'Arrow 15
Préliminaires : coalitions décisives 15
Démonstration du théorème d'Arrow 17
Théorème de Gibbard-Satterthwaite 19
Restriction du domaine des profils 23

Prolongements 25
Une autre piste : la préférence moyenne 25
La méthode de Schulze 28
La démarche 29
Procédures de détermination de la matrice Z 32
Qualités et limites de la méthode 34
Participation, abstention ? 36

Références bibliographiques 39
Livres 39
Articles (Téléchargeables sur Internet) 39