Chapitre I

Indices de pouvoir

Cadre formel

Considérons un ensemble $N=\{1,2,\cdots,n\}$ dont les éléments seront appelés votants ou joueurs[1]. Une coalition est un ensemble non vide $C\subseteq N$ de votants ; la taille d'une coalition est son nombre d'éléments, noté $|C|$. La notion essentielle est celle de coalition (gagnante ou perdante). Une coalition est gagnante lorsque, tous ses membres ayant voté de la même façon, les règles du vote font que sa position prévaut quelque soit les votes des « autres ».

1.Définition : jeu simple

Soit un ensemble $N=\{1,2,\cdots,n\}$ *dont les éléments seront appelés votants ou joueurs, on appelle* <u>*jeu [de vote] simple sur N*</u>*, une application* $v:\mathcal{P}(N)\xrightarrow{v}\{0,1\}$ *qui à chaque partie* $C\subseteq N$ *appelée coalition associe* $v(C)=\begin{cases}0 \text{ auquel cas la coalition est dite perdante}\\ \text{ou}\\ 1 \text{ auquel cas la coalition est dite gagnante}\end{cases}$

Vérifiant :

1. $v(\varnothing)=0$
2. $v(N)=1$
3. $C\subseteq C'\Rightarrow v(C)\leq v(C')$.
4. $v(C)=1\Rightarrow v(N-C)=0$

Ce jeu sera noté : $J(N,v)$.

Ces quatre conditions relèvent du strict bon sens : la première exprimant qu'une coalition sans membres ne saurait être gagnante, la seconde que l'unanimité est gagnante, la troisième que toute coalition contenant une coalition gagnante l'est aussi. Enfin, si la dernière condition n'était pas respectée, on pourrait avoir la coalition C et la coalition « opposée » $N-C$ toutes les deux gagnantes ce qui poserait un épineux problème… Cette situation se produirait avec les bleus, rouges verts si la majorité qualifiée était fixée à 7 auquel cas {Bleus}, {Rouges, Verts} seraient toutes deux gagnantes !
En revanche, la situation où C et $N-C$ sont toutes deux perdantes amène simplement à une absence de décision.

Une notion capitale pour la suite est celle de votant décisif pour une coalition :

[1] On peut s'étonner de voir un votant être appelé joueur. Mais d'une part, l'étude des pouvoirs de vote peut être considérée comme un chapitre de la Théorie Mathématique des Jeux, et, de l'autre, l'expression « jeux de la politique » est couramment utilisée.

2. Définition : votant décisif, nul, dictateur

Pour un jeu simple sur N*, un votant* i *est dit décisif pour la coalition* C $(i \in C)$ *si et seulement si :*

$$v(C)=1 \text{ et } v\left(C-\{i\}\right)=0$$

Autrement dit, la coalition C *est gagnante, mais la défection du votant* i *la prive de sa victoire.*

Une coalition est dite minimale gagnante si et seulement si tous ces éléments (votants) sont décisifs.

Un votant i *est dit nul si et seulement il n'est décisif dans aucune coalition.*

Un votant i *est qualifié de dictateur si et seulement si :* $i \in C \Rightarrow v(C)=1$.

Remarque :

Un dictateur est décisif dans toute coalition à laquelle il appartient. En effet si i est dictateur, alors pour toute coalition C à la quelle il appartient, $v(C)=1$. Comme $v\left(\{i\}\right)=1$, selon 1.4 $v\left(N-\{i\}\right)=0$. Comme $C-\{i\} \subseteq N-\{i\}$, alors $v\left(C-\{i\}\right)=0$. De plus, tous les autres votants sont nuls, ce qui interdit l'existence d'un deuxième dictateur…

Parmi les jeux simples, on trouve les jeux pondérés que l'on a évoqué dans la première partie :

3. Définition : jeu pondéré

Soit :

- ✓ *Un ensemble de votants* $N=\{1,\cdots,n\}$,
- ✓ *une liste* $W=\left(w_1,w_2,\cdots,w_n\right)$ *d'entiers >0 (*w_i *est appelé le poids du votant i). On pose :* $w=\sum_{i=1}^{i=n} w_i$,
- ✓ q *un entier, appelé majorité qualifiée ou quota tel que* $w/2<q\leq w$

Pour toute coalition C*, on pose :* $w(C)=\sum_{i\in C} w_i$.

On appelle jeu de vote pondéré le jeu simple v *sur* N *associé à* $\left(\left(w_1,w_2,\cdots,w_n\right),q\right)$ *défini par :*

$$v(C)=\begin{cases}0 \text{ si } w(C)\geq q\\ 1 \text{ si } w(C)<q\end{cases}$$

Ce jeu sera noté : $J(N,W,q)$.

Remarques :

L'idée est simple : une coalition est gagnante si et seulement si le total de ses poids est supérieur ou égal à la majorité qualifiée.

La condition $q\leq w$ dit que l'unanimité est gagnante.

La condition $w/2<q$ est la traduction pour les jeux pondérés de : $v(C)=1 \Rightarrow v(N-C)=0$.

Indices de pouvoirs de vote

Étant donné un jeu $J(N,W,q)$, il s'agit de définir pour tout votant un nombre censé reflété son « pouvoir de vote » dans le jeu J. Plus formellement, pour tout jeu J un indice de pouvoir est une application : $\pi_J : N \xrightarrow{\pi_J} \mathbb{R}^+$ que l'on notera plus simplement π lorqu'il n'y aura pas ambigüité sur le jeu.

Dans l'abondante littérature consacrée à ce sujet, de nombreuses formules d'indices destinés à refléter l'influence ou le pouvoir d'un votant ont été proposés. En général, ils se fondent sur la même idée : le pouvoir d'un votant se mesure au nombre de coalitions dans lesquelles il est décisif. Cette idée simple a donné lieu à plusieurs déclinaisons. Nous nous limiterons à deux d'entre elles. Bien que par la suite, nous appliquerons ces définitions à des jeux pondérés, leurs formulations s'appliquent à n'importe que jeu simple.

Indice de Banzhaf

4.Définition et lemme

Pour une coalition C *et un votant* i*, soit* $d_i(C) = v(C) - v\left(C - \{i\}\right)$. *Alors :*

$$d_i(C) = \begin{cases} 1 \text{ si } i \text{ décisive pour } C \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Le nombre de swings de i est $d_i = \sum_{\substack{C \subseteq N \\ i \in C}} d_i(C)$

DEMONSTRATION :

Si C non gagnante : $v(C) = v(C - \{i\}) = 0$.

Si C gagnante et i non décisif : $v(C) = v(C - \{i\}) = 1$.

Si C gagnante et i décisif : $v(C) = 1$ et $v(C - \{i\}) = 0$.

Dans une de ses formulations, le nombre d_i de coalitions est divisé par le nombre 2^{n-1} de coalitions auxquelles i appartient, dans l'autre il est divisé par la somme des d_i afin d'obtenir un indice normalisé.

5.Définition : indice de Banzhaf

L'indice de Banzhaf est défini par : $b(i) = \dfrac{d_i}{2^{n-1}}$

L'indice de Banzhaf normalisé est défini par : $\tilde{b}(i) = \dfrac{d_i}{\sum_{i=1}^{n} d_i}$

Remarques

S'il existe un dictateur i, il est décisif dans les 2^{n-1} coalitions auxquelles il appartient. Donc $d_i = 2^{n-1}$ et $b(i) = 1$.

Si un votant i est nul, n'étant jamais décisif, $d_i = 0$ et $b(i) = 0$

Le calcul de $d_i = \sum_{\substack{C \subseteq N \\ i \in C}} d_i(C)$ conduit (pour l'instant) à l'examen de toutes les coalitions auxquelles appartient le votant i soit 2^{n-1}.

Indice de Shapley-Shubik

L'indice de pouvoir de Shapley-Shubik du votant i a été défini par :

$$sh(i) = \frac{\text{somme des points de } i}{\text{nombre de permutations des } n \text{ joueurs}} = \frac{\text{somme des points de } i}{n!}$$

où le numérateur représente la somme des points marqués par le votant i au cours du cérémonial précédemment décrit. Mais cette définition s'avère difficilement praticable dés que n excède 3. Voici donc d'autres formules :

6.Proposition : indice de Shapley-Shubik

L'indice de Shapley-Shubik peut se calculer par les formules suivantes où $c = |C|$:

1. $sh(i) = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{\substack{C \subseteq N \\ i \text{ décisive} \\ \text{pour } C}} (c-1)!(n-c)!$

2. $sh(i) = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{\substack{C \subseteq N \\ i \in C}} (c-1)!(n-c)!\, d_i(C)$

3. $sh(i) = \displaystyle\sum_{\substack{C \subseteq N \\ i \in C}} \frac{1}{n\, C_{n-1}^{c-1}} d_i(C)$

4. $sh(i) = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{c=1}^{c=n} (c-1)!(n-c)!\, d_{i,c}$ *où* $d_{i,c}$ *est le nombre de coalitions de taille* c *où* i *est décisif.*

DEMONSTRATION :

1. Considérons un votant i décisif pour une coalition C de c membres, les permutations pour lesquelles il marque un point sont celles de la forme :
   $(a_1, \cdots, a_{c-1}, i, a_{c+1}, a_n)$ avec $\{a_1, \cdots, a_{c-1}\} = C - \{i\}$ et $\{a_{c+1}, \cdots, a_n\} = N - C$
   Or ce nombre de permutations est : $(c-1)!(n-c)!$.
   D'où : $sh(i) = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{\substack{C \subseteq N \\ i \text{ décisive} \\ \text{pour } C}} (c-1)!(n-c)!$
2. La deuxième formule se déduit immédiatement du lemme 4.
3. La troisième, en se rappelant que le coefficient binomial : $C_{n-1}^{c-1} = \dfrac{(n-1)!}{(c-1)!(n-c)!}$.
4. La quatrième en remarquant que toutes les coalitions de taille c qui interviennent en (2) ont le même coefficient $(c-1)!(n-c)!$.

Remarques :

Les deux dernières formules mènent à l'examen de toutes les coalitions auxquelles appartient le votant i. Le nombre de ces dernières : 2^{n-1} croît exponentiellement. Mais c'est un progrès par rapport à la méthode initiale qui requérait l'examen de $n!$ permutations. Pour $n = 15$: $2^{n-1} = 16\,384$.

La quatrième formule est simple si l'on sait calculer les $d_{i,c}$. Nous y reviendrons.

Exemples de calcul

On reprend (Bleus, Rouges, Verts) avec $W=(7,6,2)$.

Dans les tableaux, 1 indique que le votant est décisif dans la coalition considérée.

Avec une majorité qualifiée $q=8$:

Coalitions gagnantes C	Bleus	Rouges	Verts	c	$(c-1)!(n-c)!$
{Bleus, Rouges}	1	1	0	2	1
{Bleus, Verts}	1	0	1	2	1
{Rouges, Verts}	0	1	1	2	1
{Bleus, Rouges, Verts}	0	0	0	3	2

Chaque parti est décisif dans 2 coalitions de taille 2 avec $(c-1)!(n-c)!=1$, ils ont tous le même indice de Shapley-Shubik :

$$sh(Bleux)=sh(Rouges)=sh(Verts)=\frac{2\times 1}{3!}=\frac{1}{3}.$$

Avec une majorité qualifiée $q=10$:

Coalitions gagnantes C	Bleus	Rouges	Verts	c	$(c-1)!(n-c)!$
{Bleus, Rouges}	1	1	0	2	1
{Bleus, Rouges, Verts}	1	1	0	3	2

Les Bleus et les Rouges sont décisifs dans 1 coalition de taille 2 avec $(c-1)!(n-c)!=1$ et 1 de taille 3 avec $(c-1)!(n-c)!=2$. Les Verts ne sont plus décisifs du tout.

$$sh(Bleus)=sh(Rouges)=\frac{1\times 1+1\times 2}{3!}=\frac{1}{2} \qquad sh(Verts)=0$$

Comparaison entre les indices de Shapley-Shubik et Banzhaf

Pour un votant i donné :

L'indice de Banzhaf compte le nombre d_i de coalitions dans lesquelles i est décisif.

L'indice de Shapley-Shubik réalise un dénombrement plus « fin » puisque pour $c=1,\cdots,n$ il détermine $d_{i,c}$ le nombre de coalitions de taille c dans lesquelles i est décisif. Et applique aux $d_{i,c}$ une pondération $\frac{(c-1)!(n-c)!}{n!}$ différente selon la valeur de c :

$$sh(i)=\frac{1}{n!}\sum_{c=1}^{c=n}(c-1)!(n-c)!d_{i,c}$$

Pour $n=7$, le tableau suivant indique les valeurs relatives de ces pondérations :

c	1	2	3	4	5	6	7
$(c-1)!(n-c)!$	720	120	48	36	48	120	720

Il ressort que cette pondération est plus forte aux « extrémités » coalitions de petite taille ou grande taille.

On peut donner une interprétation probabiliste des coefficients de pondération $\frac{(c-1)!(n-c)!}{n!}$ intervenant dans la formule.

Le nombre de coalitions de taille c contenant un votant donné i est :

$$C_{n-1}^{c-1} = \frac{(n-1)!}{(c-1)!(n-c)!}$$

Si l'on suppose toutes ces coalitions équiprobables ainsi que la taille $c = 1, \cdots, n$ d'une coalition, la probabilité d'une coalition de taille c contenant un votant donné i est :

$$P_{i,c} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{C_{n-1}^{c-1}} = \frac{1}{n} \times \frac{(c-1)!(n-c)!}{(n-1)!} = \frac{(c-1)!(n-c)!}{n!}$$

Propriétés des indices

Nous allons revenir sur les propriétés de monotonie, de bloc et de transfert évoquées en première partie pour en donner des définitions formelles afin de procéder à des démonstrations.. Ces propriétés ont été introduites par Felsenthal et Machover sous l'appellation de postulats. Pour un indice de pouvoir, violer ces postulats constitue un paradoxe, voir une « pathologie disqualifiante » selon les mêmes auteurs.

Propriété de monotonie

7.Définition

Un indice de $\pi : i \mapsto \pi_i$ *est dit monotone si et seulement si il vérifie pour tout jeu* $J(N,W,q)$ *:*
$\forall i, j \in N : w_i \le w_j \Rightarrow \pi_i \le \pi_j$.

8.Proposition

Les indices de Banzhaf b *et* $\tilde{b}$ *sont monotones.*

DEMONSTRATION

Soit deux votants *i* et *j* avec $w_i \le w_j$ et C une coalition dans laquelle *i* est décisif, alors l'application :

$$C \mapsto \Phi(C) = \begin{cases} C \text{ si } j \in C \\ (C - \{i\}) \cup \{j\} \text{ sinon} \end{cases}$$

associe à toute coalition où *i* est décisif une coalition où *j* est décisif.

En effet, *i* étant décisif pour *C*, $w(C - \{i\}) < q$ et $q \le w(C)$. Comme $w_i \le w_j$:

- ✓ Dans le premier cas, *j* est aussi décisive pour *C* puisque $w(C - \{j\}) \le w(C - \{i\}) < q$.
- ✓ Dans le deuxième cas, on a d'une part $w(C - \{i\}) < q$ et de l'autre $w\big((C - \{i\}) \cup \{j\}\big) \ge w(C) \ge q$ .Ce qui montre que *j* est décisive pour $(C - \{i\}) \cup \{j\}$.

De plus Φ est injective. Donc $d_i \le d_j$ et par conséquence $b(i) \le b(j)$ et $\tilde{b}(i) \le \tilde{b}(j)$.

9.Proposition

L'indice de Shapley-Shubik sh *est monotone.*

DEMONSTRATION

En se reportant à la démonstration précédente, on peut remarquer que C et $\Phi(C)$ ont même taille. Par suite pour toute $c = 1, \cdots, n$ on aura $d_{i,c} \le d_{j,c}$.

Propriété de transfert

10.Définition

Soit $J\big(N,(w_1,\cdots,w_n),q\big)$, $i, j \in N$ $(i \ne j)$ *deux votants de et* $t \in \mathbb{N}^*$, $t < w_i$
et soit le jeu $J'\big(N,(w'_1,\cdots,w'_n),q\big)$ *tel que :* $w'_i = w_i - t$, $w'_j = w_j + t$ et $w'_k = w_k$ pour $k \in N - \{i, j\}$.
Alors un indice de pouvoir π *respecte le transfert si et seulement si :*

$$\pi_{J'}(i) \le \pi_J(i) \;\; et \;\; \pi_{J'}(j) \ge \pi_J(j)$$

11.Proposition

L'indice de Banzhaf non normalisé respecte le transfert.

DEMONSTRATION

Pour alléger les notations, nous supposerons que le transfert s'opère du votant 1 vers le votant 2.

Pour une coalition $C \subseteq N$, nous noterons $w(C)$ son poids dans le jeu J et $w'(C)$ son poids dans le jeu J'.

Soit une coalition C contenant le votant 1. On a alors :

$$w'(C) = \begin{cases} w(C) \text{ si } 2 \in C \\ w(C) - t \text{ si } 2 \notin C \end{cases} \qquad w'(C - \{1\}) = \begin{cases} w(C - \{1\}) + t \text{ si } 2 \in C \\ w(C - \{1\}) \text{ si } 2 \notin C \end{cases}$$

Dans tous les cas : $w'(C) \leq w(C)$ et $w'(C - \{1\}) \geq w(C - \{1\})$.

Si le votant 1 n'est pas décisif pour C dans le jeu J, alors soit :

- ✓ C n'est pas gagnante dans le jeu J. Mais alors : $w(C) < q$ et comme $w'(C) \leq w(C)$ n'est pas gagnante non plus dans le jeu J'.
- ✓ C est gagnante dans le jeu J, mais $C - \{1\}$ l'est aussi. Mais alors $w(C - \{1\}) \geq q$ et comme $w'(C - \{1\}) \geq w(C - \{1\})$ alors $w'(C - \{1\}) \geq q$ et $C - \{1\}$ est une coalition gagnante dans le jeu J'.

Dans les deux cas, le votant 1 n'est pas décisif pour C dans le jeu J'.

Le nombre d_1 de coalitions où 1 est décisif dans J est donc supérieur ou égal au nombre d_1' de coalitions où 1 est décisif dans J'.

Et : $d_1' \leq d_1 \Rightarrow \dfrac{d_1'}{2^{n-1}} \leq \dfrac{d_1}{2^{n-1}} \Rightarrow b_{J'}(1) \leq b_J(1)$

Pour montrer que : $b_{J'}(2) \leq b_J(2)$, il suffit de considérer le transfert réciproque du votant 2 vers le votant 1 qui transforme le jeu J' en J.

12.Proposition

L'indice de Shapley-Shubik respecte le transfert.

DEMONSTRATION

Il suffit de reprendre le schéma de la démonstration précédente en remplaçant :

« Soit une coalition C contenant le votant 1… »

par

Soit une coalition C de taille c contenant le votant 1…

pour conclure, pour tout $c = 1 \cdots n$, que le nombre $d_{1,c}$ de coalitions de taille c où 1 est décisive dans J est supérieur ou égal au nombre $d_{1,c}'$ de coalitions de taille c où 1 est décisive dans J'.

Comme :

$$sh_J(1) = \frac{1}{n!} \sum_{c=1}^{c=n} (c-1)!(n-c)! d_{1,c} \quad \text{et} \quad sh_{J'}(1) = \frac{1}{n!} \sum_{c=1}^{c=n} (c-1)!(n-c)! d_{1,c}'$$

Il en résulte que $sh_{J'}(1) \leq sh_J(1)$.

Comme précédemment la considération du transfert réciproque amène à $sh_{J'}(2) \geq sh_J(2)$.

Propriété de bloc

Pour alléger les notations dans la formulation de cette propriété, nous allons supposer que c'est le votant n qui vient faire bloc avec le votant 1 de poids supérieur ou égal (la numérotation des votants étant arbitraire, cela n'affecte en rien la généralité de l'énoncé).

13.Définition

Soit $J\left(N,(w_1,w_2,\cdots,w_n),q\right)$*, et* $J'\left(N-\{n\},(w_1+w_n,w_2,\cdots,w_{n-1}),q\right)$ *avec* $w_1 \geq w_n$*. Alors un indice de pouvoir* π *respecte la propriété de bloc si et seulement si :*

$$\pi_J(1) \leq \pi_{J'}(1)$$

14.Proposition

L'indice de Banzhaf non normalisé respecte la propriété de bloc.

DEMONSTRATION

Soit une coalition $C \subseteq N-\{1,n\}$, on notera : $C_1 = C \cup \{1\}$, $C_{1n} = C \cup \{1,n\}$ $C_n = C \cup \{n\}$.

Les poids de ces coalitions notés w ou w' selon que le s'on réfère au jeu J ou au jeu J' peuvent être résumés dans le tableau suivant :

Coalitions	Poids dans $J : w$	Poids dans $J' : w'$
C	$w(C)$	$w(C)$
$C_1 = C \cup \{1\}$	$w(C)+w_1$	$w(C)+w_1+w_n$
$C_{1n} = C \cup \{1,n\}$	$w(C)+w_1+w_n$	
$C_n = C \cup \{n\}$	$w(C)+w_n$	

Á chaque coalition $C_1 \subseteq N-\{1\}$ à laquelle le votant 1 appartient, on peut associer le couple de coalitions : $\left(C_1, C_{1n}\right)$ incluses dans N.

Si le votant 1 n'est pas décisif dans C_1 pour le jeu J', alors pour le jeu J :

Soit : $w'(C_1) < q$ (C_1 n'est pas gagnant dans J'), auquel cas :

$$w(C_1) = w'(C_1) - w_n < q$$

et

$$w(C_{1n}) = w'(C_1) < q$$

Soit $w'(C) \geq q$, auquel cas :

$$w\left(C_1 - \{1\}\right) = w\left(C\right) = w'(C) \geq q$$

et

$$w\left(C_{1n} - \{1\}\right) = w\left(C_n\right) = w'(C) + w_n \geq q$$

Dans tous les cas, 1 n'est décisif ni dans C_1, ni dans C_{1n} pour le jeu J.

En résumé toute coalition où 1 est décisif pour J est de la forme $C_1 = C \cup \{1\}$ ou $C_{1n} = C \cup \{1,n\}$ où 1 est décisif pour $C_1 = C \cup \{1\}$ dans J'. En conclusion, le nombre d_1' de coalitions où 1 est décisif dans le jeu J' et le nombre d_1 de coalitions où 1 est décisif dans le jeu J vérifient :

$$d_1' \geq \frac{d_1}{2} \text{ et donc : } b_{J'}(1) = \frac{d_1'}{2^{n-2}} \geq b_J(1) = \frac{d_1}{2^{n-1}}$$

15.Proposition

L'indice de Shapley-Shubik respecte la propriété de bloc.

DEMONSTRATION

Nous allons revenir au cérémonial des permutations, assimilées à des listes.

À toute permutation P' de $N-\{n\}$, on peut associer n permutations P de N, selon la position d'insertion du votant n.

Soit $P' = T \,\&\, (1) \,\&\, Q$ [2] une permutation de $N-\{n\}$. On notera : $P = T_n \,\&\, (1) \,\&\, Q$ pour une permutation de N issue de P' où le votant n est inséré avant le 1 et $P = T \,\&\, (1) \,\&\, Q_n$ pour une permutation de N issue de P' où le votant n est inséré après le 1.
Les poids de ces listes notés w ou w' selon que le s'on réfère au jeu J ou au jeu J' peuvent être résumés dans le tableau suivant :

Listes	Poids dans $J : w$	Poids dans $J' : w'$
T	$w(T)$	$w(T)$
$T \,\&\, (1)$	$w(T)+w_1$	$w(T)+w_1+w_n$
T_n	$w(T)+w_n$	
$T_n \,\&\, (1)$	$w(T)+w_n+w_1$	

Si le votant 1, pour le jeu J', ne marque pas de point dans cette permutation P', alors, dans ce cas :

Soit $w'(T) = w(T) \geq q$.

- ✓ Si $P = T_n \,\&\, (1) \,\&\, Q$, alors $w(T_n) = w(T) + w_n \geq q$.
- ✓ Si $P = T \,\&\, (1) \,\&\, Q_n$, alors $w(T) = w'(T) \geq q$.

Soit $w'(T \,\&\, \{1\}) = w(T) + w_1 + w_n < q$.

- ✓ Si $P = T_n \,\&\, (1) \,\&\, Q$, alors $w(T_n \,\&\, (1)) = w(T) + w_1 + w_n < q$.
- ✓ Si $P = T \,\&\, (1) \,\&\, Q_n$, alors $w(T \,\&\, (1)) = w(T) + w_1 < q$.

Dans aucun cas, le votant 1 ne marque de point dans une permutation P issue de P' pour le jeu J .

En résumé, toute permutation P de N dans laquelle le votant 1 marque un point pour le jeu J est issue d'une permutation P' de $N-\{n\}$ dans laquelle 1 marque un point pour le jeu J'. Comme chaque permutation P' de $N-\{n\}$ dans laquelle 1 marque un point pour le jeu J' est associée à au plus n permutations P de N (dans lesquelles le votant 1 marque ou non un point pour le jeu) J , on peut en déduire :

$$n \times (\text{somme des points de 1 dans } J') \geq (\text{somme des points de 1 dans } J')$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{n \times (\text{somme des points de 1 dans } J')}{n!} \geq \frac{(\text{somme des points de 1 dans } J')}{n!} .$$
$$\Downarrow$$
$$sh_{J'}(1) \geq sh_J(1)$$

Comme l'ont montré les deux exemples présentés en première partie l'indice de Banzhaf <u>normalisé</u> ne respecte ni la propriété de transfert, ni la propriété de bloc. Il est assez déroutant de constater que l'opération de normalisation, apparemment assez anodine[3], fait perdre à l'indice de Banzhaf ces deux propriétés…

---

[2] & désigne l'opérateur de concaténation des listes.

[3] On parle ici du domaine mathématique.

Remarque :

Pour autant, il ne faut pas croire que satisfaire à ces trois propriétés, suffisent à garantir que l'indice de pouvoir soit « bon ». Il est facile de montrer que l'indice le plus trivial consistant à définir l'indice de pouvoir d'un votant i par : $\frac{w_i}{w}$ respecte ces trois propriétés (et d'autres) comme l'a fait László Á. Kóczyy dans l'article « *Proportional power is free from paradoxes* ». Mais, si cet indice trivial était satisfaisant, toute l'abondante littérature consacrée à traduire par un indice numérique la notion de « pouvoir de vote » serait sans objet.

En revanche, comme il a été dit lors de l'introduction de cette section, ne pas les respecter, peut amener à mettre en doute la pertinence des formules proposées. Et c'est le cas pour nombre de celles que nous n'avons pas évoqué…

✈ *Comment calculer efficacement ces indices ?*

Indice de Banzhaf

La solution est de passer par des polynômes générateurs :

16.Proposition

Soit le polynôme $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$ *de degré* w *défini par :*

$$P(X) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + X^{w_i}\right) \in \mathbb{N}[X] = \sum_{j=1}^{j=w} p_j X^j ,$$

alors le coefficient p_j *de* P *est égal au nombre de coalitions de poids j.*

DEMONSTRATION

Récurrence sur le nombre de votants n.

Vrai pour $n = 1$

Supposons l'énoncé est vrai pour un ensemble $N = \{1, 2, \cdots, n\}$ de n votants de poids $(w_1, w_2, \cdots, w_n)$ et soit un votant supplémentaire $n+1$ doté d'un poids w_{n+1}.

L'ensemble des coalitions de $N' = \{1, 2, \cdots, n, n+1\}$ est la réunion des coalitions issues de N avec l'ensemble des coalitions contenant $n+1$ de la forme : $C \cup \{n+1\}$ avec $C \subseteq N$.

Le nombre de coalitions de poids j dans N' est égal à la somme :

- ✓ du nombre de coalitions de poids j issues de N : p_j selon l'hypothèse de récurrence

  et
- ✓ du nombre de coalitions de la forme $C \cup \{n+1\}$ avec $C \subseteq N$ et $w(C) = j - w_{n+1}$. Ce nombre est $p_{j-w_{n+1}}$ selon l'hypothèse de récurrence

Soit : $p_j + p_{j-w_{n+1}}$

Or dans le développement de $\left(p_0 + p_1 X + \cdots + p_w X^w\right)\left(1 + X^{w_{n+1}}\right)$, le coefficient de X^j est précisément $p_j + p_{j-w_{n+1}}$. L'énoncé est donc vrai pour $n+1$.

Exemple avec Maple

En étendant notre exemple au quadripartisme (Bleus, Rouges, Verts, Blancs), Maple calcule :

```
> W:=[7,6,4,2];
```

$$W := [7, 6, 4, 2]$$

```
> P:=product((1+X^W[i]),i=1..nops(W));
```

$$P := (1 + X^7)(1 + X^6)(1 + X^4)(1 + X^2)$$

```
> sort(collect(P,X));
```

$$X^{19} + X^{17} + X^{15} + 2X^{13} + X^{12} + X^{11} + X^{10} + X^9 + X^8 + X^7 + 2X^6 + X^4 + X^2 + 1$$

Et on sait qu'il existe 1 coalition de poids 19, 0 de poids 18, 2 de poids 13…

17. Corollaire

Soit un votant k, et soit le polynôme $P^k(X) \in \mathbb{Z}[X]$ *de degré* $w - w_k$ *définie par :*

$$P^k(X) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \left(1 + X^{w_i}\right) = \frac{P(X)}{1 + X^{w_k}} = \sum_{j=1}^{j=w-w_k} p_j^k X^j \ ,$$

alors le coefficient p_j^k *de* P^k *est égal au nombre de coalitions de poids j n'incluant pas k .*

DEMONSTRATION

Il suffit d'appliquer la proposition précédente à $\{1, 2, \cdots, n\} - \{k\}$ avec les poids $(w_1, w_2, \cdots, w_{k-1}, w_{k+1}, \cdots, w_n)$.

18. Proposition

Avec les notations de la proposition et du corollaire précédents :

$$p_j^k = \begin{cases} p_j & \text{pour } j = 0 \cdots \min(w_k\text{-}1, w - w_k) \\ p_j - p_{j-w_k}^k & \text{pour } j = w_k \cdots (w - w_k) \end{cases}$$

DEMONSTRATION

$P(X) = P^k(X)\left(1 + X^{w_k}\right)$. Donc $p_j = p_j^k + p_{j-w_k}^k$ pour $j = 0 \cdots w$ avec les conventions : $p_j^k = 0$ si $j < 0$ ou $j > w - w_k$.

Exemple avec Maple

Nombres de coalitions sans les Bleus :

```
> W:=[7,6,4,2];
```

$$W := [7, 6, 4, 2]$$

```
> P1:=product((1+X^W[i]),i=2..nops(W));
```

$$P1 := (1 + X^6)(1 + X^4)(1 + X^2)$$

```
> sort(collect(P1,X));
```

$$X^{12} + X^{10} + X^8 + 2\,X^6 + X^4 + X^2 + 1$$

Ce polynôme fournit une information précieuse. Si l'on suppose, par exemple la majorité qualifiée q fixée à 11, les coalitions de poids 10, 8, 6, 4, 2 sont perdantes, mais si les Bleus de poids 7 les rejoignent, alors celles de poids 10+7, 8+7, 6+7, 4+7, sont gagnantes. Autrement dit les bleus sont décisifs dans toutes ses coalitions. Il suffit de les compter : 1+1+2+1=5. Les bleus sont décisifs dans 5 coalitions :

$$d_{Bleus} = 5\,;\, b_{Bleus} = \frac{5}{2^3} = \frac{5}{8}.$$

19. Proposition

Soit un votant k, d_k *le nombre de coalitions pour lesquelles il est décisif pour une majorité qualifiée fixé à* q *et soit le polynôme :* $P^k(X) = \sum_{j=1}^{j=w-w_k} p_j^k X^j$ *défini ci-dessus, alors :*

$$d_k = \sum_{j=q-w_k}^{q-1} p_j^k \quad \textit{(avec la convention : } p_j^k = 0 \textit{ si } j > w - w_k \textit{).}$$

DEMONSTRATION

Les coalitions pour lesquelles le votant k est décisif sont les combinaisons $C' = C \cup \{k\}$ avec $k \notin C$ telles que : $w(C) < q$ et $w(C') = w(C) + w_k \geq q$. Dans le polynôme P^k, elles correspondent aux termes $p_j^k X^j$ pour $j \geq q - w_k$ et $j < q$. Et p_j^k représente le nombre de coalitions de poids j ne contenant pas le votant k. D'où : $d_k = \sum_{j=q-w_k}^{q-1} p_j^k$.

Implantation du calcul de d_k sous forme de procédures Maple

Maple sait certes (voir ci-dessus) effectuer des calculs polynomiaux. Mais compte tenu des calculs à effectuer, il est plus efficace de représenter les polynômes par des objets de type « *array* » et d'écrire les algorithmes de calcul. Ainsi le polynôme :

$$1 + X + 3X^2 + X^4 + 2X^6$$

sera représenté par le tableau (array de premier indice 0) :

$$[1, 1, 3, 0, 1, 0, 2]$$

Tout se résout en trois procédures :

Calcul du polynôme $P(X)$

```
pol:=proc(W::list)
local i, j, n,w::integer, P,Q::array ;
n:=nops(W);
w:=sum(W[i],i=1..n);
P:=array(0..w);Q:=array(0..w);
for j from 0 to w do if j=0 or j=W[1] then P[j]:=1; else P[j]:=0;fi;od;
#boucle principal
for i from 2 to n do
      for j from 0 to w do if j>=W[i] then Q[j]:=P[j-W[i]] else Q[j]:=0;fi;od;
      for j from 0 to w do P[j]:= Q[j]+P[j];od;
od;
#fin de boucle
RETURN(P);
end;
```

La double boucle principal amène à une complexité en $O(n \times w)$.

Calcul d'un polynôme $P^k(X)$

Pour le calculer, au lieu de recommencer des calculs déjà effectués lors du calcul de P, mieux vaut diviser P par $1 + X^{w_k}$, ce que réalise la procédure suivante :

```
polk:=proc(W::list,k::integer,P::array)
local i, j, n,w::integer, Pk::table ;
n:=nops(W);
w:=sum(W[i],i=1..n);
Pk:=array(0..w-W[k]);
for j from 0 to min(W[k]-1,w-W[k]) do Pk[j]:=P[j];od;
for j from W[k] to w-W[k] do Pk[j]:=P[j]-Pk[j-W[k]];od;
RETURN(Pk);
end;
```

La complexité est en $O(w)$.

Calcul de tous les d_k

```
nbswing:=proc(W::list,q::integer)
local i, j,k, n,w,dk::integer, P,Pk::array,Nbs::list ;
n:=nops(W);
w:=sum(W[i],i=1..n);
Nbs:=[seq(0,i=1..n)];
P:=pol(W);
for k from 1 to n do
 Pk:=polk(W,k,P);
 Nbs[k]:=sum(Pk[j],j=(q-W[k])..min(q-1,w-W[k]));
```

```
od;
RETURN(Nbs);
end;
```

Le calcul de P en amont de la boucle est en $O(n\times w)$. La boucle appelle n fois la procédure `polk` laquelle est en $O(w)$. Ce qui amène à une complexité en $O(n\times w)$ pour calculer tous les d_k (et donc de tous les indices de Banzhaf normalisées ou non). Cette méthode est donc beaucoup plus efficace que celle, de complexité exponentielle, fondée sur l'examen de toutes les coalitions…

Rappelons, qu'une fois les d_k déterminés, le calcul des indices de Banzhaf est immédiat.
Voici un exemple d'exécution avec les 15 pays de l'UE d'avant 2004 où les poids, rappelons le, sont les suivants :

Allemagne, France, Italie, Royaume-Uni :	10
Espagne :	8
Belgique, Grèce, Pays-Bas, Portugal :	5
Autriche, Suède :	4
Danemark, Irlande, Finlande :	3
Luxembourg :	2
Total des poids des 15 membres :	**87**

avec une majorité qualifiée $q = 62$

```
> WE:=[10,10,10,10,8,5,5,5,5,4,4,3,3,3,2];
                WE := [10, 10, 10, 10, 8, 5, 5, 5, 5, 4, 4, 3, 3, 3, 2]
> t:=time():nbswing(WE,62);temps_calcul:=time()-t;
        [1849, 1849, 1849, 1849, 1531, 973, 973, 973, 973, 793, 793, 595, 595,
          595, 375]

                         temps_calcul := 0.016
```

(unité de temps : seconde)

Indice de Shapley-Shubik

À l'encontre de la situation précédente, il faut, dans le dénombrement des coalitions, prendre en compte non seulement leur poids mais aussi leur taille. On va encore s'appuyer sur un polynôme générateur mais avec 2 variables.

20.Proposition

Soit le polynôme $P(X,Y)\in\mathbb{Z}[X,Y]$ de degré w en X, n en Y défini par :

$$P(X,Y)=\prod_{i=1}^{n}\left(1+X^{w_i}Y\right)=\sum_{j=1}^{j=w}\sum_{t=0}^{t=n}p_{j,t}X^jY^t\ ,$$

alors le coefficient $p_{j,t}$ de P est égal au nombre de coalitions de poids j et de taille t.

DEMONSTRATION

Elle reprend le schéma de récurrence de la proposition.13, mais en stratifiant les coalitions selon leur taille.

Récurrence sur le nombre de votants n.

Vrai pour $n=1$

Supposons l'énoncé est vrai pour un ensemble $N=\{1,2,\cdots,n\}$ de n votants de poids $(w_1,w_2,\cdots,w_n)$ et soit un votant supplémentaire $n+1$ doté d'un poids w_{n+1}.

L'ensemble des coalitions de $N'=\{1,2,\cdots,n,n+1\}$ de taille t est la réunion des coalitions de taille t issues de N avec l'ensemble des coalitions contenant $n+1$ de la forme : $C\cup\{n+1\}$ avec $C\subseteq N$ et $|C|=t-1$.

Le nombre de coalitions de poids j et de taille t dans N' est égal à la somme :

- ✓ du nombre de coalitions de poids j et de taille t issues de N : $p_{j,t}$ selon l'hypothèse de récurrence.

  et
- ✓ du nombre de coalitions de la forme $C\cup\{n+1\}$ avec $C\subseteq N$ et $|C|=t-1$ et $w(C)=j-w_{n+1}$. Ce nombre est $p_{j-w_{n+1},t-1}$ selon l'hypothèse de récurrence

Soit : $p_{j,t}+p_{j-w_{n+1},t-1}$

Or dans le développement de $\left(\sum_{j=1}^{j=w}\sum_{t=0}^{t=n}p_{j,t}X^jY^t\right)\left(1+X^{w_{n+1}}Y\right)$, le coefficient de X^jY^t est précisément $p_{j,t}+p_{j-w_{n+1},t-1}$. L'énoncé est donc vrai pour $n+1$.

Exemple avec Maple

```
> W:=[7,6,4,2];
> P:=product((1+X^W[i]*Y),i=1..nops(W));
```

$$P := (1+X^7\,Y)\,(1+X^6\,Y)\,(1+X^4\,Y)\,(1+X^2\,Y)$$

```
> sort(collect(P,[X,Y]));
```

$$X^{19}\,Y^4+X^{17}\,Y^3+X^{15}\,Y^3+X^{12}\,Y^3+(Y^3+Y^2)\,X^{13}+X^{11}\,Y^2+X^{10}\,Y^2+X^9\,Y^2$$
$$+X^8\,Y^2+X^7\,Y+(Y^2+Y)\,X^6+X^4\,Y+X^2\,Y+1$$

On observe, par exemple, que parmi les coalitions de poids 13, il en existe 1 de taille 3 et 1 de taille 2…

21. Corollaire

Soit un votant k, et soit le polynôme $P^k(X,Y)\in\mathbb{Z}[X,Y]$ *de degré* $w-w_k$ *en* X , $n-1$ *en* Y *défini par :*

$$P^k(X,Y)=\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\left(1+X^{w_i}Y\right)=\frac{P(X,Y)}{1+X^{w_k}Y}=\sum_{j=1}^{j=w-w_k}\sum_{t=0}^{t=n-1}p_{j,t}^{k}X^{j}Y^{t}\ ,$$

alors le coefficient $p_{j,t}^k$ *de* P^k *est égal au nombre de coalitions de poids j de taille t n'incluant pas k.*

DEMONSTRATION

Il suffit d'appliquer la proposition précédente à $\{1,2,\cdots,n\}-\{k\}$ avec les poids $(w_1,w_2,\cdots,w_{k-1},w_{k+1},\cdots,w_n)$.

22. Proposition

Avec les notations de la proposition et du corollaire précédents :

$$p_{j,t}^{k}=\begin{cases} p_{j,t} & \text{pour } j=0\cdots\min\left(w_k\text{-}1,w-w_k\right)\text{ et } t=0\cdots n\\ 0 & \text{pour } j=w_k\cdots(w-w_k)\text{ et } t=0\\ p_{j,t}-p_{j-w_k,t-1}^{k} & \text{pour } j=w_k\cdots(w-w_k)\text{ et } t>0\end{cases}$$

DEMONSTRATION

$P(X,Y)=P^k(X,Y)\left(1+X^{w_k}Y\right)$. Donc $p_{j,t}=p_{j,t}^k+p_{j-w_k,t-1}^k$ pour $j=0\cdots w$ et $t=0\cdots n$ avec les conventions : $p_{j,t}^k=0$ si $j<0$ ou $j>w-w_k$ ou $t<0$.

Exemple avec Maple

Nombres de coalitions sans les Bleus :

```
> W:=[7,6,4,2];
                    W := [7, 6, 4, 2]
>  P1:=product((1+X^W[i]*Y),i=2..nops(W));
               P1 := (1 + X^6 Y) (1 + X^4 Y) (1 + X^2 Y)
> sort(collect(P1,[X,Y]));
   X^12 Y^3 + X^10 Y^2 + X^8 Y^2 + (Y^2 + Y) X^6 + X^4 Y + X^2 Y + 1
```

23. Proposition

Soit un votant k, $d_{k,t}$ *le nombre de coalitions de taille* t *pour lesquelles il est décisif pour une majorité qualifiée fixé à q et soit le polynôme :* $P^k(X,Y)=\sum_{j=1}^{j=w-w_k}\sum_{t=0}^{t=n-1}p_{j,t}^kX^jY^t$ *défini ci-dessus, alors :*

$$d_{k,t}=\sum_{j=q-w_k}^{q-1}p_{j,t-1}^{k}\ .(\textit{avec la convention : } p_{j,t-1}^{k}=0\ \textit{ si }\ j>w-w_k\ )$$

DEMONSTRATION

Les coalitions de taille t pour lesquelles le votant k est décisif sont les combinaisons $C'=C\cup\{k\}$ avec $k\notin C$ telles que : $|C|=t-1, w(C)<q$ et $w(C')=w(C)+w_k\geq q$. Dans le polynôme P^k, elles correspondent

aux termes $p^k_{j,t-1}X^jY^{t-1}$ pour $j \geq q - w_k$ et $j < q$. Et $p^k_{j,t-1}$ représente le nombre de coalitions de poids j de taille $t-1$ ne contenant pas le votant k. D'où : $d_k = \sum_{j=q-w_k}^{q-1} p^k_{j,t-1}$.

Implantation du calcul de d_k sous forme de procédures Maple

Ces procédures reprennent avec une légère complication, celles précédemment exposées.

Calcul du polynôme $P(X,Y)$

Le polynôme $P(X,Y)$ est représenté par un tableau à 2 dimensions : `array(0..w,0..n)`. La procédure est la suivante :

```
pol2:=proc(W::list)
local i, j, n, w, t::integer, P, Q::array ;
n:=nops(W);
w:=sum(W[i],i=1..n);
P:=array(0..w,0..n);Q:=array(0..w,0..n);
#initialisation de P
for j from 0 to w do for t from 0 to n do P[j,t]:=0;od;od;
P[0,0]:=1;P[W[1],1]:=1;
#boucle principale
for i from 2 to n do
  for j from 0 to w do
    for t from 1 to n do
    if j>=W[i] then Q[j,t]:=P[j-W[i],t-1] else Q[j,t]:=0;fi;
    od;
  od;

  for j from 0 to w do
    for t from 1 to n do
    P[j,t]:= Q[j,t]+P[j,t];
    od;
  od;
od;
#fin boucles
RETURN(P);
end;
```

Cette procédure est en $O(n^2 \times w)$

Calcul d'un polynôme $P^k(X,Y)$

Comme la procédure, elle effectue la division du polynôme $P(X,Y)$ par $1 + X^{w_k}Y$:

```
polk2:=proc(W::list,k::integer,P::array)
local i, j, n,w,t ::integer, Pk::array ;
n:=nops(W);
w:=sum(W[i],i=1..n);
Pk:=array(0..w-W[k],0..n-1);

for j from 0 to min(W[k]-1, w-W[k]) do
  for t from 0 to n-1 do
  Pk[j,t]:=P[j,t];
  od;
od;

for j from W[k] to w-W[k] do
Pk[j,0]:=0;
  for t from 1 to n-1 do
  Pk[j,t]:=P[j,t]-Pk[j-W[k],t-1];
  od;
od;

RETURN(Pk);
end;
```

Cette procédure est en $O(w \times n)$.

Calcul de tous les $d_{k,t}$

Cette procédure calcule tous les $d_{k,t}$ pour tous les votants $k=1\cdots n$ et pour toutes tailles $t=1\cdots n$. Le résultat est retourné sous la forme d'une matrice $n\times n$ Nbs où $Nbs_{k,t}=d_{k,t}$.

```
nbswing2:=proc(W::list,q::integer)
local i, j,k, n,w,t::integer, P,Pk::array,Nbs::matrix ;
n:=nops(W);
w:=sum(W[i],i=1..n);
Nbs:=matrix(n,n);
P:=pol2(W);
for k from 1 to n do
Pk:=polk2(W,k,P);
  for t from 1 to n do
  Nbs[k,t]:=sum(Pk[j,t-1],j=(q-W[k])..min(q-1,w-W[k]));
  od;
od;
RETURN(Nbs);
end;
```

Cette procédure appelle :

- ✓ une fois la procédure `pol2` de complexité $O(n^2\times w)$ en amont de la boucle,
- ✓ n fois la procédure `polk2` de complexité $O(w\times n)$ dans la boucle,
- ✓ et effectue n fois dans cette même boucle une sommation d'un nombre de termes inférieur à w.

Ce qui amène à une complexité de $O(n^2\times w)$ pour cette procédure.

Calcul des indices de Shapley-Shubik de tous les votants

La procédure suivante fondée sur un calcul matriciel retourne la liste des indices Shapley-Shubik de tous les votants :

```
sh_all:=proc(W::list,q::integer)
local i,n::integer,Nbs,Coef,SH::matrix ;
n:=nops(W);
Nbs:=nbswing2(W,q);
Coef:=matrix(n,1,(i,j)->1/(i*binomial(n,i)));
SH:=Nbs&*Coef;
RETURN(evalm(transpose(SH)));
end;
```

L'appel à nbswing2 a une complexité de $O(n^2\times w)$, le produit matriciel d'une matrice $n\times n$ par une matrice $n\times 1$ est en $O(n^2)$. Ce qui amène finalement à une complexité de $O(n^2\times w)$ pour le calcul de tous ces indices.

Voici un exemple d'exécution avec les 15 pays de l'UE d'avant 2004 :

```
> WE:=[10,10,10,10,8,5,5,5,5,4,4,3,3,3,2];
```

$$WE := [10, 10, 10, 10, 8, 5, 5, 5, 5, 4, 4, 3, 3, 3, 2]$$

```
> t:=time():sh_all(WE,62);temps_calcul:=time()-t;
```

$$\left[\frac{7}{60}, \frac{7}{60}, \frac{7}{60}, \frac{7}{60}, \frac{860}{9009}, \frac{19883}{360360}, \frac{19883}{360360}, \frac{19883}{360360}, \frac{19883}{360360}, \frac{743}{16380}, \frac{743}{16380}, \frac{1588}{45045}, \frac{1588}{45045}, \frac{1588}{45045}, \frac{932}{45045}\right]$$

$$temps\_calcul := 0.249$$

(unité de temps : seconde)

Lorsque, à l'instar de l'exemple ci-dessus, plusieurs votants sont dotés du même poids, le temps de calcul peut être abrégé, en ne recommençant pas les calculs pour un votant dont le poids est égal à celui d'un votant déjà traité. Cette optimisation est mise en œuvre dans l'application Java présentée en annexe.

Bibliographie

1 ANDJIGA NICOLAS-GABRIEL, CHANTREUIL FREDERIC, LEPELLEY DOMINIQUE, *La mesure du pouvoir de vote,* Mathématiques et Sciences Humaines N° 163, automne 2003.
http://www.ehess.fr/revue-msh/pdf/N163R920.pdf

2 DIFFO LAMBO L ET J MOULEN, *Quel pouvoir mesure-t-on dans un jeu de vote ?* Mathématiques et Sciences Humaines N° 152, p27-47.
https://msh.revues.org/2821

3 FELSENTHAL, D. S., AND M. MACHOVER, *Postulates and paradoxes of relative voting power - A critical re-appraisal*, Theory and Decision, 38(2), 195-229 (1995).

4 KÓCZYY LÁSZLÓ Á., *Proportional power is free from paradoxes* 0806, Óbuda University, Keleti Faculty of Business and Management, revised May 2008
http://ideas.repec.org/p/pkk/wpaper/0806.html

5 LARUELLE, A., AND F. VALENCIANO, *A critical reappraisal of some voting paradoxes*, Working Papers. Serie AD, Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas, S.A. (Ivie) 2004-04.
http://ideas.repec.org/p/ivi/wpasad/2004-04.html

6 LEECH DENNIS, *Computation of Power Indices*, Warwick economic research papers, N° 644, juillet 2002.
http://homepages.warwick.ac.uk/~ecaae/

7 SHAPLEY, L. S., AND M. SHUBIK, *A method for evaluating the distribution of power in a committee system*, American Political Science Review, 48(3), 787-792, (1954).