Chapitre II

La représentation proportionnelle

Cadre formel

Parties entières

Compte tenu de l'usage abondant qui en sera fait, il n'est pas inutile de rappeler quelques propriétés des fonctions parties entières :

- ✓ Plancher : $\lfloor x \rfloor =$ le plus grand entier $\leq x$
- ✓ Plafond : $\lceil x \rceil =$ le plus petit entier $\geq x$

Pour $n \in \mathbb{Z},\ x, y \in \mathbb{R}$

$\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow n \leq x < n+1$	$\lceil x \rceil = n \Leftrightarrow n-1 < x \leq n$
$x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x$	$x \leq \lceil x \rceil < x+1$
$x < n \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor < n$	$n < x \Leftrightarrow n < \lceil x \rceil$
$n \leq x \Leftrightarrow n \leq \lfloor x \rfloor$	$x \leq n \Leftrightarrow \lceil x \rceil \leq n$
$x < n+1 \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor \leq n$	$n-1 < x \Leftrightarrow n \leq \lceil x \rceil$
$\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ ou $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$	$\lceil x+y \rceil = \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$ ou $\lceil x \rceil + \lceil y \rceil - 1$

Notations, définitions

On suppose $k \geq 2$ états : $E_1, \cdots, E_i, \cdots, E_k$ dont les populations sont représentées par une liste : $P = (p_1, \cdots, p_i, \cdots, p_k)$ où $p_i \in \mathbb{N}^*$ [1] est le nombre d'habitants de l'état E_i. Parfois l'état E_i sera plus simplement désigné par son indice i.

On notera :

- ✓ $p = \sum_{i=1}^{k} p_i$ la population totale.
- ✓ s le nombre de sièges à pourvoir strictement inférieur à p (et dans la pratique très inférieur).
- ✓ $q_i = \frac{p_i}{p} s$, le nombre de sièges que devrait recevoir l'état E_i si un nombre fractionnaire de sièges était admis. Cette fraction sera nommée : quota exact de l'état E_i. On a :

  $$\sum_{i=1}^{k} q_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{p_i}{p} s = \frac{s}{p} \sum_{i=1}^{k} p_i = s$$

  La liste $(q_1, \cdots, q_i, \cdots, q_k)$ sera notée Q.
- ✓ $\lfloor q_i \rfloor$, le plus grand entier inférieur ou égal à q_i, appelée quota inférieur.
  La liste $(\lfloor q_1 \rfloor, \cdots, \lfloor q_i \rfloor, \cdots, \lfloor q_k \rfloor)$ sera notée .$\lfloor Q \rfloor$.
- ✓ $\lceil q_i \rceil$, le plus petit entier supérieur ou égal à q_i, appelé quota supérieur.
  La liste $(\lceil q_1 \rceil, \cdots, \lceil q_i \rceil, \cdots, \lceil q_k \rceil)$ sera notée .$\lceil Q \rceil$

Pour deux listes de réels L, L' de longueur k, $L \leq L'$ signifiera : $\forall i = 1 \cdots k : L_i \leq L'_i$.

Le but du jeu est, en fonction de la liste de population P et du nombre de sièges offerts s, de déterminer une répartition « équitable ».

[1] On suppose donc qu'il n'existe pas d'états sans âmes.

1. Définition

On appelle méthode[2] *de répartition, une application* F *qui à tout couple* (P,s)

- ✓ *où* P *désigne une liste d'entiers (*>0 *) de longueur* k
- ✓ *et* s *désigne un entier (*$s>2$

associe une liste d'entiers positifs ou nuls $F(P,s)=S=(s_1,\cdots,s_i,\cdots,s_k)$ *vérifiant le respect de la hiérarchie :*

$$\sum_{i=1}^{k} s_i = s \quad et \quad p_u > p_v \Rightarrow s_u \geq s_v$$

REMARQUES :

La condition $p_u > p_v \Rightarrow s_u \geq s_v$ traduit l'idée naturelle qu'un état ne puisse avoir plus de siège qu'un état plus peuplé. Telle que rédigée, elle n'interdit pas que 2 états d'égale population puisse se voir attribuer un nombre de sièges différents. C'est même inévitable si ces 2 états également peuplés doivent se partager 3 sièges (exemple, certes un peu tiré par les cheveux).

Balinski et Young définissent une méthode de répartition comme un ensemble d'applications F chacune conduisant à une solution. Cette définition élargie a pour fin de préserver la notion de « neutralité » qui peut se poser dans certaines situations d'égalité. Pour des raisons de simplicité, nous nous en tiendrons à la définition 1.

2. Définition

Une méthode de répartition F *telle que* $F(P,s)=S$ *respecte la règle :*

1. *des quotas inférieurs si et seulement si :* $\lfloor Q \rfloor \leq S \Leftrightarrow \forall i=1\cdots k : \lfloor q_i \rfloor \leq s_i$
2. *des quotas supérieurs si et seulement si :* $S \leq \lceil Q \rceil \Leftrightarrow \forall i=1\cdots k : s_i \leq \lceil q_i \rceil$
3. *des quotas si et seulement si :*$\lceil Q \rceil \leq S \leq \lceil Q \rceil \Leftrightarrow \forall i=1\cdots k : \lfloor q_i \rfloor \leq s_i \leq \lceil q_i \rceil$

La règle des quotas (3) est équivalente à :

$\forall i=1\cdots k : s_i = \lfloor q_i \rfloor$ ou $s_i = \lceil q_i \rceil$ ou encore : $\forall i=1\cdots k : |q_i - s_i| < 1$.

[2] Nous fûmes tentés de parler de fonction de répartition, mais il semble que l'appellation soit déjà prise…

Analyse de la méthode d'Hamilton

3.Proposition

La méthode d'Hamilton est une méthode de répartition respectueuse de la hiérarchie et des quotas.

On a : $q_i = \lfloor q_i \rfloor + r_i$ avec $0 \le r_i < 1$. En sommant sur i : $s = \sum_{i=1}^{k} q_i = \sum_{i=1}^{k} \lfloor q_i \rfloor + \sum_{i=1}^{k} r_i$.

$\sum_{i=1}^{k} \lfloor q_i \rfloor$ est égal au nombre de sièges attribués à la 1° étape

$\sum_{i=1}^{k} r_i$ est donc le nombre de sièges vacants à l'issue de cette étape.

Comme $\sum_{i=1}^{k} r_i < k$, il ne reste qu'au plus $k-1$ sièges à attribuer à la seconde étape. Ces sièges sont attribués (1 par état) aux $\sum_{i=1}^{k} r_i$ états ayant le plus grand reste. À la 2° étape un état E_i ne peut recevoir qu'un siège en plus des $\lfloor q_i \rfloor$ sièges qu'il a reçu à la 1° étape :

$$\lfloor q_i \rfloor \le s_i \le \lfloor q_i \rfloor + 1$$

Cette inégalité a deux conséquences :

1. $p_u > p_v \Rightarrow q_u > q_v \Rightarrow \lfloor q_u \rfloor \ge \lfloor q_v \rfloor \Rightarrow s_u \ge s_v$. Donc Hamilton respecte la hiérarchie.
2. Soit $\lfloor q_i \rfloor = q_i$ et alors $r_i = 0$ et E_i ne reçoit pas de siège supplémentaire et $s_i = \lfloor q_i \rfloor$.
   Soit $\lfloor q_i \rfloor < q_i$ et $\lfloor q_i \rfloor + 1 = \lceil q_i \rceil$.
   Dans les 2 cas $\lfloor q_i \rfloor \le s_i \le \lceil q_i \rceil$.

Algorithme de calcul

Procédure Maple : hamilton()

```
hamilton:=proc(P,s)
local i,j,u,imax,rmax,sna,k,p,R,S;
k:=nops(P);
p:=sum(P[i],i=1..k);
#1° étape
S:=[seq(floor(P[i]*s/p),i=1..k)];
print(S);#facultatif : imprime la répartition à l'issue de la 1° étape
#2° étape les restes
sna:=s-sum(S[i],i=1..k);
R:=[seq(P[i]*s/p-S[i],i=1..k)];
  for j from 1 to sna do
  rmax:=R[1];imax:=1;
    for u from 2 to nops(R) do
        if R[u]>rmax then rmax:=R[u]; imax:=u;fi;
    od;
  S[imax]:=S[imax]+1;
  R[imax]:=-1;
  od;
RETURN(S);
end:
```

Exemples :

```
hamilton([95,75,25,11],20);
```

$$[9, 7, 2, 1]$$
$$[9, 7, 3, 1]$$

```
hamilton([34,25,15,12,10,4],10);
```

$$[3, 2, 1, 1, 1, 0]$$
$$[3, 3, 2, 1, 1, 0]$$

Analyse de l'algorithme

Le seul point qui appelle un commentaire est la double boucle de la 2° étape, qui décide, selon son reste, qui doit recevoir un des `sna` sièges vacants. Le principe est simple : pour chaque siège vacant on parcourt la liste des restes `R`, pour déterminer `imax :=argmax(restes[u])`. Le siège est alors attribué à l'état `imax` et son reste mis à `-1` de manière à ce qu'il ne puisse recevoir un deuxième siège supplémentaire. Un problème se pose lorsque 2 états ont le même reste maximum. La rédaction de l'algorithme tranche alors en faveur de l'`imax` le plus faible. Autrement dit la méthode ou plus précisément l'algorithme qui la concrétise n'est pas totalement « neutre ». En cas d'égalité, le positionnement d'un état dans la liste peut jouer. Cette question sera à nouveau posée dans le chapitre sur l'agrégation des préférences : dans certaines situations « symétriques » (il est vrai rare dans la pratique), la solution ne peut être qu'arbitraire.

Exemples :

```
hamilton([50,50],3);
```

$$[1, 1]$$
$$[2, 1]$$

L'algorithme attribue le 3° siège à l'état E_1. On pourrait certes modifier l'algorithme pour lui faire attribuer le 3° siège à E_2, mais, comme cela a déjà été dit, changer le bénéficiaire de l'arbitraire ne l'abolit pas.

```
hamilton([341,241,213,205],10);
```

$$[3, 2, 2, 2]$$
$$[4, 2, 2, 2]$$

```
hamilton([241,341,213,205],10) ;
```

$$[2, 3, 2, 2]$$
$$[3, 3, 2, 2]$$

Dans ce deuxième exemple, à l'issue de la première étape, il reste un siège à répartir et deux « plus fort reste ». L'algorithme tranche en faveur du mieux placé dans la liste, l'état de population 341 dans le premier cas, l'état de population 241 dans le deuxième.

Paradoxes et fusion

Voici les définitions formalisées des paradoxes présentées en première partie, ainsi que celle caractérisant le comportement d'une méthode vis-à-vis des fusions :

4.Définition : paradoxe de l'Alabama

Une méthode F est exemple du paradoxe de l'Alabama[3] *si et seulement si :*

$$F(P,s) \le F(P,s+1)$$

5.Définition : paradoxe de la population (Virginie-Maine)

Soit $P=(p_1,\cdots,p_i,\cdots,p_k)$, $P'=(p'_1,\cdots,p'_i,\cdots,p'_k)$. *Une méthode* F *telle que :*

$$F(P,s)=(s_1,\cdots,s_i,\cdots,s_k) \text{ et } F(P',s)=(s'_1,\cdots,s'_i,\cdots,s'_k)$$

est dite exemple du paradoxe de la population[4] *si et seulement si, pour tout* $u \ne v$ *:*

$$\frac{p'_u}{p_u} > \frac{p'_v}{p_v} \text{ implique l'impossibilité d'avoir : } s'_u < s_u \text{ et } s'_v > s_v$$

Cette définition interdit donc qu'un état ayant son taux de variation strictement supérieur à un autre puisse perdre des sièges alors que l'autre en gagne.

Pour faciliter les notations, on suppose que c'est le dernier état que l'on supprime :

6.Définition : paradoxe de l'Oklahoma

Soit $P=(p_1,\cdots,p_i,\cdots,p_k)$, $P'=(p_1,\cdots,p_i,\cdots,p_{k-1})$ *et* $k \ge 3$. *Une méthode de répartition* F *telle que :*

$$F(P,s)=(s_1,\cdots,s_i,\cdots,s_k) \Rightarrow F(P',s-s_k)=(s_1,\cdots,s_i,\cdots,s_{k-1})$$

est dite exempte du paradoxe de l'Oklahoma.

Pour faciliter les notations, on suppose que c'est les 2 derniers états qui fusionnent :

7.Définition : comportement vis-à-vis des fusions

Soit $P=(p_1,\cdots,p_i,\cdots,p_k)$, $P'=(p_1,\cdots,p_i,\cdots,p'_{k-1})$ *et* $k \ge 3$ *avec* $p'_{k-1}=p_{k-1}+p_k$. *Soit une méthode de répartition F telle que :* $F(P,s)=(s_1,\cdots,s_i,\cdots,s_k)$ *et* $F(P',s)=(s'_1,\cdots,s'_i,\cdots,s'_{k-1})$.

F est dite :

- ✓ *favorable aux fusions si et seulement si :* $s'_{k-1} \ge s_{k-1}+s_k$
- ✓ *défavorable aux fusions si et seulement si :* $s'_{k-1} \le s_{k-1}+s_k$
- ✓ *neutre sinon.*

[3] Balinski et Young emploient le qualificatif de « *house monotone* ».

[4] Balinski et Young emploient le qualificatif de « *population monotone* ».

Analyse de la méthode de Jefferson

Pour une liste $P=(p_1,\cdots,p_i,\cdots,p_k)$ de populations, la méthode de Jefferson consiste à déterminer un nombre d (diviseur de Jefferson) tel que :

$$\left\lfloor \frac{p_1}{d} \right\rfloor+\cdots+\left\lfloor \frac{p_i}{d} \right\rfloor+\cdots+\left\lfloor \frac{p_k}{d} \right\rfloor=s \quad (1)$$

et de définir la répartition des s sièges par :

$$J(P,s)=\left(\left\lfloor \frac{p_1}{d} \right\rfloor,\cdots,\left\lfloor \frac{p_i}{d} \right\rfloor\cdots,\left\lfloor \frac{p_k}{d} \right\rfloor\right)$$

8.Proposition

La méthode de Jefferson est une méthode de répartition respectueuse de la hiérarchie. et immunisée contre le paradoxe l'Alabama.

DEMONSTRATION :

On a : $p_u > p_v \Rightarrow \left\lfloor \frac{p_u}{d} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{p_v}{d} \right\rfloor \Rightarrow s_u \geq s_v$. Jefferson est donc bien respectueuse de la hiérarchie.

Pour l'Alabama :

L'application de $[1\cdots+\infty[\xrightarrow{g}\mathbb{N}\ :\ x\mapsto \sum_{i=1}^{k}\left\lfloor \frac{p_i}{x} \right\rfloor$ est décroissante. Si l'on a : $\sum_{i=1}^{k}\left\lfloor \frac{p_i}{d} \right\rfloor=s$ et $\sum_{i=1}^{k}\left\lfloor \frac{p_i}{d'} \right\rfloor=s+1$, c'est donc que $d'<d$. On a alors : $\forall i=1\cdots k$: $\left\lfloor \frac{p_i}{d'} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{p_i}{d} \right\rfloor$. Comme les deux sommes ne diffèrent que de 1, alors il existe un et un seul $m\in\{1,\cdots,k\}$ tel que $\left\lfloor \frac{p_m}{d'} \right\rfloor=\left\lfloor \frac{p_m}{d} \right\rfloor+1$. Donc pour $i\neq m$: $\left\lfloor \frac{p_i}{d'} \right\rfloor=\left\lfloor \frac{p_i}{d} \right\rfloor$.

Autrement dit tous les états conservent le même nombre de sièges sauf un qui en reçoit un supplémentaire. On a bien :

$$J(P,s)\leq J(P,s+1)$$

En première partie, deux questions se posaient concernant la mise en œuvre de la méthode. La proposition suivante répond à la première :

9.Proposition

S'il existe deux diviseurs de Jefferson, ils conduisent à la même répartition.

DEMONSTRATION :

Supposons qu'il existe deux diviseurs d et d', vérifiant :

$$\left\lfloor \frac{p_1}{d} \right\rfloor+\cdots+\left\lfloor \frac{p_i}{d} \right\rfloor+\cdots+\left\lfloor \frac{p_k}{d} \right\rfloor=s \quad (1)$$

$$\left\lfloor \frac{p_1}{d'} \right\rfloor+\cdots+\left\lfloor \frac{p_i}{d'} \right\rfloor+\cdots+\left\lfloor \frac{p_k}{d'} \right\rfloor=s \quad (1')$$

Supposons $d'>d$, alors pour tout i: $\frac{p_i}{d}>\frac{p_i}{d'}$ et donc $\left\lfloor \frac{p_i}{d} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{p_i}{d'} \right\rfloor$. S'il existe i tel que : $\left\lfloor \frac{p_i}{d} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{p_i}{d'} \right\rfloor$, alors les égalités (1) et (1') imposent qu'il existe un j tel que $\left\lfloor \frac{p_j}{d} \right\rfloor < \left\lfloor \frac{p_j}{d'} \right\rfloor$, mais alors $\frac{p_j}{d}<\frac{p_j}{d'}$ et donc $d'<d$. Contradiction. Donc tout diviseur vérifiant l'équation (1) mène à la même répartition.

Cela étant acquis, il faut trouver au moins un diviseur…

En quête d'un diviseur

Où chercher ?

On a pour tout i : $0 \le \frac{p_i}{d} - \left\lfloor \frac{p_i}{d} \right\rfloor < 1$. En sommant sur i : $0 \le \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{k} p_i - \sum_{i=1}^{k}\left\lfloor \frac{p_i}{d} \right\rfloor < k$. Donc si d vérifie l'équation (1), en tenant compte de $\sum_{i=1}^{k} p_i = p$ et $\sum_{i=1}^{k}\left\lfloor \frac{p_i}{d} \right\rfloor = s$:

$$0 \le \frac{p}{d} - s < k \Leftrightarrow s \le \frac{p}{d} < k + s \Leftrightarrow \frac{p}{k+s} < d \le \frac{p}{s}$$

On obtient donc un intervalle dans lequel chercher un éventuel diviseur de Jefferson.

Enquête sur l'échec de la quête

Mais, ainsi que l'exemple $P = (52,\ 25,\ 13,\ 10)$ et $s = 5$ donné en première partie, l'a montré, la recherche n'aboutit pas toujours.

Soit la fonction en escalier décroissante : $]1 \quad p] \xrightarrow{g} \mathbb{N} : x \mapsto \sum_{i=1}^{k}\left\lfloor \frac{p_i}{x} \right\rfloor$

déjà évoquée lors de la démonstration de la proposition 8.

Soit $a \in]1 \quad p]$ tel qu'il existe un état E_u avec $\frac{p_u}{a} \in \mathbb{N}$, alors g présente une discontinuité à droite en a.

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

- pour $i = u$, $\left\lfloor \frac{p_i}{a+\varepsilon} \right\rfloor \le \left\lfloor \frac{p_i}{a} \right\rfloor + 1 = \frac{p_i}{a} + 1$,
- pour $i \ne u$, $\left\lfloor \frac{p_i}{a+\varepsilon} \right\rfloor \le \left\lfloor \frac{p_i}{a} \right\rfloor$

et donc $g(a+\varepsilon) \le g(a) - 1$.

Si E_u est seul à vérifier $\frac{p_u}{a} \in \mathbb{N}$, on a une marche de hauteur 1 sur le graphe de g en a. Mais, il peut exister plusieurs état i tels que $\frac{p_i}{a} \in \mathbb{N}$. Soit $N_a = \left\{ i \,/\, \frac{p_i}{a} \in \mathbb{N} \right\}$ et $n_a = | N_a |$.

- pour $i \in N_a$, $\left\lfloor \frac{p_i}{a+\varepsilon} \right\rfloor \le \left\lfloor \frac{p_i}{a} \right\rfloor - 1 = \frac{p_i}{a} - 1$,
- pour $i \notin N_a$, $\left\lfloor \frac{p_i}{a+\varepsilon} \right\rfloor \le \left\lfloor \frac{p_i}{a} \right\rfloor$

$$g(a+\varepsilon) = \sum_{i \in N_a}\left\lfloor \frac{p_i}{a+\varepsilon} \right\rfloor + \sum_{i \notin N_a}\left\lfloor \frac{p_i}{a+\varepsilon} \right\rfloor \le \sum_{i \in N_a}\left(\left\lfloor \frac{p_i}{a} \right\rfloor - 1\right) + \sum_{i \notin N_a}\left\lfloor \frac{p_i}{a} \right\rfloor \le \underbrace{\sum_{i=1}^{k}\left\lfloor \frac{p_i}{a} \right\rfloor}_{=g(a)} - n_a$$

et donc $g(a+\varepsilon) \le g(a) - n_a$ et la hauteur de la marche est de n_a.

Donc pour aucun x, on aura $g(x) \in \{g(a)-1, \cdots, g(a)-n_a+1\}$. Autrement dit, il n'existe pas de diviseur de Jefferson permettant de répartir $s \in \{g(a)-1, \cdots, g(a)-n_a+1\}$ sièges.

Or l'éventualité que, pour $a \in]1 \quad p]$, le nombre $n_a \ge 2$ n'est en rien extravagante. Remarquons qu'elle ne survient que si a est rationnel et $a > 1$. On peut don écrire : $a = \frac{b}{c}$ avec $b, c \in \mathbb{N}^*$, $c < b$ et $PGCD(b,c) = 1$. On a alors, pour tout $i \in N_a$:

$$\frac{p_i}{a} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{cp_i}{b} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow b \text{ diviseur de } p_i$$

(La dernière équivalence se fondant du lemme de Gauss.)

En résumé l'existence de diviseur commun (autre que 1) entre deux (ou plus) p_i, provoque l'apparitions de « trous » parmi les nombres de sièges répartissables par la méthode de Jefferson. Plus précisément :

10.Proposition

Soit $P=(p_1,\cdots,p_i,\cdots,p_k)$, *N un ensemble d'états dont les populations ont un diviseur commun* b *autre que 1, alors, pour tout* $a=\dfrac{b}{c}$, *avec* $b,c\in\mathbb{N}^*$, $c<b$ *et* $PGCD(b,c)=1$, *il n'existe aucun* x *tel que* $g(x)\in\{g(a)-1,\cdots,g(a)-|N|+1\}$. *Autrement dit la méthode de Jefferson échoue à répartir* $s\in\{g(a)-1,\cdots,g(a)-|N|+1\}$ *sièges.*

Exemple[5] *:*

Avec $P=(52,25,13,10)$, les diviseurs communs sont : 2, 5, 13. On obtient en se limitant à $c=1$:

```
epsilon:=1/1000000000:
g(2),g(2+epsilon);g(5),g(5+epsilon);g(13),g(13+epsilon);
```

$$49, 47$$
$$19, 17$$
$$6, 4$$

Plus complètement, voici la liste des a générateurs de « trous » :

```
La:=sort([2,seq(5/i,i=1..4),seq(13/i,i=1..12)]);
```

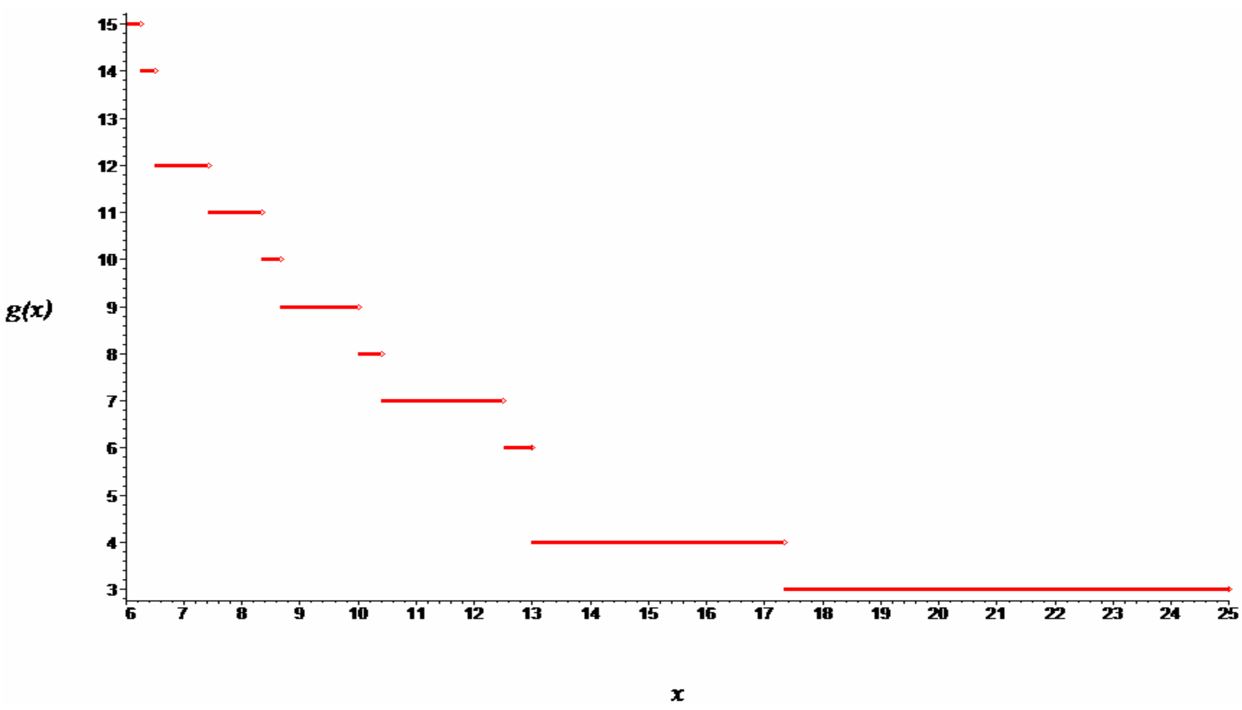
$$La := \left[\frac{13}{12},\frac{13}{11},\frac{5}{4},\frac{13}{10},\frac{13}{9},\frac{13}{8},\frac{5}{3},\frac{13}{7},2,\frac{13}{6},\frac{5}{2},\frac{13}{5},\frac{13}{4},\frac{13}{3},5,\frac{13}{2},13\right]$$

Et liste des « trous » correspondant :

```
Ls:=map(x->g(x)-1,La);
```

$$Ls := [91, 83, 78, 75, 67, 60, 58, 52, 48, 44, 38, 36, 29, 21, 18, 13, 5]$$

Représentation graphique partielle de g



[5] Pour cet exemple, nous avons commis une infidélité à R en utilisant Maple qui permet de manipuler des fractions exactes

L'algorithme d'Hondt

Les sièges sont attribués un par un. Le processus va donc se dérouler de l'étape initiale $j=0$ (aucun siège attribué) à chaque étape finale $j=s$ (tous les sièges sont attribués). Á chaque étape j de la distribution, il est défini une liste de « mérite », noté M^j par :

$M^j=\left(\frac{p_1}{s_1^j+1},\cdots,\frac{p_i}{s_i^j+1},\cdots,\frac{p_k}{s_k^j+1}\right)$ où s_i^j désigne le nombre de sièges attribués à l'état E_i, à l'étape j (pour l'étape finale $j=s$, on écrira plus simplement s_i).

Déroulement de l'algorithme :

- ✓ Initialement, à l'étape $j=0$, pour tout i, $s_i^0=0$ et $M^0=\left(p_1,\cdots,p_i,\cdots,p_k\right)=P$. Le premier siège est attribué à l'état $\arg\max(P)$, c'est-à-dire à l'état le plus peuplé.
- ✓ Ensuite, pour passer de l'étape j à l'étape $j+1$, un siège est attribué à $m=\arg\max\left(M^j\right)$:

$$s_i^{j+1}=\begin{cases} s_i^j+1 & \text{si } i=m \\ s_i^j & \text{si } i\neq m \end{cases}$$

Et le processus se poursuit jusqu'à garniture de tous les sièges.

REMARQUES :

- ✓ Á l'étape j, le nombre de sièges attribués est : $\sum_{i=1}^{k} s_i^j=j$.
- ✓ $\arg\max\left(M^{j-1}\right)$ peut n'être pas unique. La procédure Maple présenté ci-dessous pour concrétiser cet algorithme précisera alors comment choisir m.

L'algorithme esquissé ci-dessus peut se traduire par la fonction R suivante :

Procédure Maple : hondt()

```
hondt:=proc(P,s)
local i,j,u,imax,mmax,k,v,p,M,S;
k:=nops(P);
p:=sum(P[i],i=1..k);
S:=[seq(0,i=1..k)];
M:=copy(P);
for j from 1 to s do
    # Détermination de imax
    mmax:=M[1];imax:=1;
    for u from 2 to k do
        if M[u]>mmax then mmax:=M[u]; imax:=u;fi;
        od;
     # fin détermination de imax
    S[imax]:=S[imax]+1;
    M[imax]:= P[imax]/(S[imax]+1);
    od;
RETURN(S);
end:
```

Exemples :

```
hondt([51,25,14,10],5);
```

$$[3, 1, 1, 0]$$

Avec l'exemple où la recherche d'un diviseur de Jefferson n'aboutissait pas :

```
hondt([52,25,13,10],5);
```

$$[4, 1, 0, 0]$$

Ou en reprenant l'exemple illustrant Hamilton :

```
hondt([95,75,25,11],20);
```

$$[10, 7, 2, 1]$$

Pour mémoire Hamilton retournait :

```
hamilton([95,75,25,11],20);
```

$$[9, 7, 3, 1]$$

manifestant son désaccord avec Hondt.

Analyse de la procédure

Après initialisation de `S[ ]` et `M[ ]`, la boucle principale distribue les sièges 1 par 1. Á chaque exécution `imax`, l'indice de l'état le plus « méritant » est déterminé par la boucle intérieure, puis la liste des sièges attribués et la liste de « mérite » sont mis à jour. Le même problème que pour l'algorithme `hamilton()` peut surgir : 2 états E_a et E_b peuvent se trouver, à une étape de l'exécution, d'égal mérite. En ce cas l'algorithme `hondt()` tranche, comme `hamilton()` en faveur du premier sur la liste `pop` (E_a si $a<b$). Mais, à l'étape suivante, dans la liste de « mérite », seul `merites[a]` sera diminué, ce qui rend alors E_b le plus méritant et il est alors servi à son tour. Mais ce raisonnement ne vaut que si <u>il existe une étape suivante</u>… Donc l'algorithme ne garantit pas totalement la « neutralité ». Et les réflexions faites à ce sujet à propos de l'algorithme `hamilton()` peuvent être intégralement reprises :

```
hondt([50,50],3);
```

$$[2, 1]$$

$P=(52,25,13,10)$ avec $s=5$, exemple où le diviseur de Jefferson faisait défaut, mène aussi à une violation de la neutralité :

```
hondt([52,25,13,10],5);
```

$$[4, 1, 0, 0]$$

```
hondt([13,25,52,10],5);
```

$$[1, 1, 3, 0]$$

Propriétés de l'algorithme d'Hondt

11.Lemme

À toute étape $j=0\cdots s$ *de l'algorithme d'Hondt, on a, en convenant* $\frac{p_i}{0}=+\infty$ *:*

$$\max_{i=1\cdots k}\left(\frac{p_i}{s_i^j+1}\right)\leq \min_{i=1\cdots k}\left(\frac{p_i}{s_i^j}\right)$$

DEMONSTRATION :

Récurrence sur j :

1. $\mathcal{H}_0$ manifestement vrai.
2. $\mathcal{H}_j \Rightarrow \mathcal{H}_{j+1}$.

   À l'étape $j+1$, le siège supplémentaire va à un état E_m tel que : $\frac{p_m}{s_m^j+1}=\max_{i=1\cdots k}\left(\frac{p_i}{s_i^j+1}\right)$.

   Et l'on a : $s_i^{j+1}=\begin{cases} s_i^j & \text{si } i\neq m \\ s_i^j+1 & \text{si } i=m\end{cases}$. Dans les 2 cas, $\frac{p_i}{s_i^{j+1}+1}\leq\frac{p_m}{s_m^j+1}$

   Sur l'autre versant :

Selon l'hypothèse de récurrence : $\frac{p_m}{s_m^j+1} \le \frac{p_i}{s_i^j}$. Or $\frac{p_i}{s_i^{j+1}} = \begin{cases} \frac{p_i}{s_i^j} & \text{si } j \ne m \\ \frac{p_m}{s_m^j+1} & \text{si } j = m \end{cases}$ Dans les 2 cas $\frac{p_m}{s_m^j+1} \le \frac{p_i}{s_i^{j+1}}$.

Au final : $\forall i = 1 \cdots k$: $\frac{p_i}{s_i^{j+1}+1} \le \frac{p_i}{s_i^{j+1}}$, ce qui équivaut à $\mathcal{H}_{j+1}$.

12.Proposition : d'Hondt et les quotas inférieurs

À toute étape $j = 0 \cdots s$ de l'algorithme d'Hondt, on a, pour tout état $i = 1 \cdots k$:

$$\left\lfloor \frac{p_i}{p} j \right\rfloor \le s_i^j$$

Pour $j = s$, cette formule montre que la méthode d'Hondt respecte les quotas inférieurs.

DEMONSTRATION :

Pour $i = 1 \cdots k$: $\left\lfloor \frac{p_i}{p} j \right\rfloor \le \frac{p_i}{p} j$. Donc : $\sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{p_i}{p} j \right\rfloor \le \sum_{i=1}^{k} \frac{p_i}{p} j = j$

Supposons qu'à l'étape j, il existe un état E_i tel que : $s_i^j < \left\lfloor \frac{p_i}{p} j \right\rfloor$

Comme $\sum_{i=1}^{k} s_i^j = j \ge \sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{p_i}{p} j \right\rfloor$, il existe nécessairement un état E_m tel que : $\left\lfloor \frac{p_m}{p} j \right\rfloor < s_m^j$. On a donc :

$s_i^j < \left\lfloor \frac{p_i}{p} j \right\rfloor \Leftrightarrow s_i^j + 1 \le \frac{p_i}{p} j \Leftrightarrow \frac{p}{j} \le \frac{p_i}{s_i^j+1}$

$\left\lfloor \frac{p_m}{p} j \right\rfloor < s_m^j \Leftrightarrow \frac{p_m}{p} j < s_m^j \Leftrightarrow \frac{p_m}{s_m^j} < \frac{p}{j}$

Et donc : $\frac{p_m}{s_m^j} < \frac{p}{j} \le \frac{p_i}{s_i^j+1}$ en contradiction avec le lemme 11.

La proposition précédente indique qu'à la fin de l'algorithme d'Hondt, tous les états obtiennent au moins leur quota inférieur. La proposition suivante montre que ce résultat est atteint avant.

13.Proposition

Soit, $q = \sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{p_i}{p} s \right\rfloor$, s_i^q le nombre de sièges obtenus par l'état E_i à l'étape q de l'algorithme d'Hondt, alors pour tout $i = 1 \cdots k$:

$$\left\lfloor \frac{p_i}{p} s \right\rfloor = s_i^q$$

Autrement dit, à l'étape q, tous les états obtiennent exactement leur quota inférieur.

DEMONSTRATION :

Par définition de q, on a : $q = \sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{p_i}{p} s \right\rfloor$. À l'encontre de la démonstration précédente où l'on avait : $j \ge \sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{p_i}{p} j \right\rfloor$, il s'agit d'une égalité. Et de plus, le nombre de sièges distribués à cette étape est égal à q :

$$q = \sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{p_i}{p} s \right\rfloor = \sum_{i=1}^{k} s_i^q$$

S'il existe un état qui n'atteint pas son quota inférieur, il existe alors un état qui le dépasse et vice versa.

Supposons qu'à l'étape q, il existe un état E_i tel que : $s_i^q < \left\lfloor \frac{p_i}{p} s \right\rfloor$ et un état E_m tel que : $\left\lfloor \frac{p_m}{p} s \right\rfloor < s_m^q$,

on a alors :

$$s_i^q < \left\lfloor \frac{p_i}{p} s \right\rfloor \Leftrightarrow s_i^q + 1 \leq \frac{p_i}{p} s \Leftrightarrow \frac{p}{s} \leq \frac{p_i}{s_i^j + 1}$$

$$\left\lfloor \frac{p_m}{p} s \right\rfloor < s_m^q \Leftrightarrow \frac{p_m}{p} s < s_m^q \Leftrightarrow \frac{p_m}{s_m^q} < \frac{p}{s}$$

Et donc : $\frac{p_m}{s_m^q} < \frac{p}{s} \leq \frac{p_i}{s_i^q + 1}$ en contradiction avec le lemme 11.

Cette dernière proposition suggère une modification de l'algorithme d'Hondt pour le faire se dérouler, à l'instar de l'algorithme d'Hamilton, en deux étapes :

1. On attribue à chaque état son quota inférieur : $\left\lfloor \frac{p_i}{p} s \right\rfloor$. Il reste alors $s - \sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{p_i}{p} s \right\rfloor$ sièges vacants
2. On répartit un par un les sièges inoccupés au plus « méritant » selon la procédure originale.

Procédure Maple : hondt2()

```
hondt2:=proc(P,s)
local i,j,u,imax,mmax,sna,k,p,M,S;
k:=nops(P);
p:=sum(P[i],i=1..k);
#1° étape
S:=[seq(floor(P[i]*s/p),i=1..k)];
print(S);#facultatif : imprime la répartition à l'issue de la 1° étape

#2° étape
sna:=s-sum(S[i],i=1..k);#nb sièges vacants
M:=[seq(P[i]/(S[i]+1),i=1..k)];
  for j from 1 to sna do
    mmax:=M[1];imax:=1;
    # détermination de imax
    for u from 2 to k do
        if M[u]>mmax then mmax:=M[u]; imax:=u;fi;
     od;
    # fin détermination de imax
  S[imax]:=S[imax]+1;
  M[imax]:= P[imax]/(S[imax]+1);
  od;
RETURN(S);
end:
```

À l'encontre d'Hamilton où un état ne peut bénéficier que d'<u>un</u> siège supplémentaire dans la seconde étape, cette deuxième version de l'algorithme d'Hondt peut en accorder plusieurs à un même état dans sa seconde étape :

```
hamilton([951,750,250,110],80);
```

$$[36, 29, 9, 4]$$
$$[37, 29, 10, 4]$$

```
hondt2([951,750,250,110],80);
```

$$[36, 29, 9, 4]$$
$$[38, 29, 9, 4]$$

Relation entre méthode de Jefferson et l'algorithme d'Hondt

Á l'encontre de la méthode de Jefferson qui peut échouer faute de diviseur, la méthode de Hondt, concrétisée par l'algorithme présenté ci-dessus fournit toujours une solution. Les énoncés de ce paragraphe montreront que la méthode de Hondt est une méthode de Jefferson « améliorée », autrement dit sans tâtonnement dans la recherche d'un diviseur ni impasse.

14. Lemme

Soit $P=(p_1,\cdots,p_i,\cdots,p_k)$ *et* s *le nombre de sièges à attribuer et* $S=(s_1,\cdots,s_i,\cdots,s_k)$ *une répartition.* S *est obtenue par la méthode de Jefferson si et seulement si il existe un nombre* d *vérifiant :*

$$\max_i\left(\frac{p_i}{s_i+1}\right) < d \le \min_i\left(\frac{p_i}{s_i}\right).$$

DEMONSTRATION :

On convient que $\frac{p_i}{s_i}=+\infty$ si $s_i=0$.

L'existence d'un nombre d vérifiant $\max_i\left(\frac{p_i}{s_i+1}\right) < d \le \min_i\left(\frac{p_i}{s_i}\right)$ équivaut à:

$$\forall i=1\cdots k:\quad \frac{p_i}{s_i+1} < d \le \frac{p_i}{s_i}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall i=1\cdots k:\quad s_i \le \frac{p_i}{d} < s_i+1$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall i=1\cdots k:\quad s_i=\left\lfloor \frac{p_i}{d}\right\rfloor.$$

Comme $\sum_{i=1}^{k} s_i = s$, d est un diviseur de Jefferson amenant à répartition $S=(s_1,\cdots,s_i,\cdots,s_k)$.

15. Proposition

Soit $P=(p_1,\cdots,p_i,\cdots,p_k)$ *et* s *le nombre de sièges à attribuer et* $S=(s_1,\cdots,s_i,\cdots,s_k)$ *une répartition due à l'algorithme d'Hondt. Alors :*

- ✓ *soit :* $\max_{i=1\cdots k}\left(\frac{p_i}{s_i+1}\right) < \min_{i=1\cdots k}\left(\frac{p_i}{s_i}\right)$ *et il existe un diviseur de Jefferson* d *conduisant à la même répartition* S*,*
- ✓ *soit :* $\max_{i=1\cdots k}\left(\frac{p_i}{s_i+1}\right) = \min_{i=1\cdots k}\left(\frac{p_i}{s_i}\right)$ *et il n'existe pas de diviseur de Jefferson.*

DEMONSTRATION :

Selon le lemme 11, $\max_{i=1\cdots k}\left(\frac{p_i}{s_i+1}\right) \le \min_{i=1\cdots k}\left(\frac{p_i}{s_i}\right)$.

Dans le cas d'inégalité stricte, il existe d tel que : $\max_i\left(\frac{p_i}{s_i+1}\right)<d\le\min_i\left(\frac{p_i}{s_i}\right)$ et le lemme 14 permet de conclure.

✈ Dans le cas d'égalité, en pose : $m=\arg\max_{i=1\cdots k}\left(\frac{p_i}{s_i+1}\right)$ et $l=\arg\min_{i=1\cdots k}\left(\frac{p_i}{s_i}\right)$. L'égalité $\frac{p_m}{s_m+1}=\frac{p_l}{s_l}$ impose $m\ne l$.

La fraction $\frac{p_m}{s_m+1}=\frac{p_l}{s_l}$ peut être mise sous forme irréductible : $\frac{b}{c}$. p_m et p_l ont donc b comme diviseur commun. Comme le rapport population/siège est strictement plus grand que 1, ce diviseur commun vérifie $1<b$.

On pose : $N=\left\{i\,/\,\frac{p_i}{s_i+1}=\frac{p_m}{s_m+1}\right\}$. N contient m, mais peut aussi contenir d'autres états, l exclu. De l'égalité :

$$\frac{p_m}{s_m+1}=\frac{p_l}{s_l}=\frac{b}{c},$$

On peut déduire :

- ✓ Pour $i\in N$: $\frac{p_i}{b/c}=s_i+1$ et $\left\lfloor\frac{p_i}{b/c}\right\rfloor=s_i+1$.
- ✓ Pour $i\notin N$, on a :

  $\frac{p_i}{s_i+1}<\frac{p_m}{s_m+1}=\frac{b}{c}$ (l'inégalité est stricte puisque $i\notin N$) et $\frac{b}{c}=\frac{p_l}{s_l}\le\frac{p_i}{s_i}$.

  Ce qui implique $s_i\le\frac{p_i}{b/c}<s_i+1$ et $\left\lfloor\frac{p_i}{b/c}\right\rfloor=s_i$.

Si l'on reprend la fonction g : $x\mapsto\sum_{i=1}^{k}\left\lfloor\frac{p_i}{x}\right\rfloor$ de la proposition 7 :

$$g\left(\frac{b}{c}\right)=\sum_{i=1}^{k}\left\lfloor\frac{p_i}{b/c}\right\rfloor=\sum_{i\in N}\left\lfloor\frac{p_i}{b/c}\right\rfloor+\sum_{i\notin N}\left\lfloor\frac{p_i}{b/c}\right\rfloor=\sum_{i\in N}(s_i+1)+\sum_{i\notin N}s_i=|N|+\sum_{i=1}^{k}s_i=s+|N|$$

Or $b\ge 2$ est un diviseur commun des p_i où $i\in N$, mais aussi de p_l. Il est donc diviseur commun d'un ensemble ayant au moins $|N|+1$ éléments.

Par application de la proposition 7 il n'existe pas de diviseur de Jefferson permettant de répartir $s=g\left(\frac{b}{c}\right)-(|N|+1)+1=g\left(\frac{b}{c}\right)-|N|$ sièges.

L'algorithme d'Hondt donc retourne une répartition, même en l'absence de diviseur de Jefferson d. Dans la suite du texte, nous parlerons indifféremment de méthode de Jefferson ou de méthode d'Hondt.

Qu'il existe ou non un diviseur de Jefferson, on a le résultat suivant :

16.Proposition

Soit $P=(p_1,\cdots,p_i,\cdots,p_k)$, $J(P,s)=(s_1,\cdots,s_i,\cdots,s_k)$ la répartition obtenue par l'algorithme d'Hondt, alors il existe un nombre d tel que :

$$\forall i=1\cdots k:\frac{p_i}{d}-1\le s_i\le\frac{p_i}{d}$$

DEMONSTRATION :

D'après le lemme 12 : $\max\limits_{i=1\cdots k}\left(\dfrac{p_i}{s_i+1}\right) \le \min\limits_{i=1\cdots k}\left(\dfrac{p_i}{s_i}\right)$. Soit $d \in \left[\max\limits_{i=1\cdots k}\left(\dfrac{p_i}{s_i+1}\right) \quad \min\limits_{i=1\cdots k}\left(\dfrac{p_i}{s_i}\right)\right]$, alors :

$\forall i=1\cdots k : \dfrac{p_i}{s_i+1} \le d \le \dfrac{p_i}{s_i} \Leftrightarrow \forall i=1\cdots k : \dfrac{p_i}{d} - 1 \le s_i \le \dfrac{p_i}{d}$

Propriétés de la méthode de Jefferson (suite)

17.Proposition : Jefferson et le paradoxe de la population

La méthode de Jefferson est exempte du paradoxe de la population.

DEMONSTRATION :

Soit $P=(p_1,\cdots,p_i,\cdots,p_k)$, $P'=(p_1',\cdots,p_i',\cdots,p_k')$, et les répartitions obtenues par la méthode de Jefferson : $J(P,s)=(s_1,\cdots,s_i,\cdots,s_k)$ et $J(P',s)=(s_1',\cdots,s_i',\cdots,s_k')$

Soit 2 états E_u, E_v, le premier ayant un taux de variation strictement supérieur au second : $\dfrac{p_v'}{p_v} < \dfrac{p_u'}{p_u}$.

Nous allons montrer que l'on ne peut avoir $s_v < s_v'$ <u>et</u> $s_u' < s_u$.

Selon la proposition 16, il existe d, d' tels que :

$$\frac{p_u}{d} - 1 \le s_u \le \frac{p_u}{d} \text{ et } \frac{p_u'}{d'} - 1 \le s_u' \le \frac{p_u'}{d'} \quad (1)$$

$$\frac{p_v}{d} - 1 \le s_v \le \frac{p_v}{d} \text{ et } \frac{p_v'}{d'} - 1 \le s_v' \le \frac{p_v'}{d'} \quad (2)$$

Supposons $s_v < s_v'$, selon (2) : $\dfrac{p_v}{d} \le \dfrac{p_v'}{d'} \Rightarrow \dfrac{d'}{d} \le \dfrac{p_v'}{p_v}$.

Comme $\dfrac{p_v'}{p_v} < \dfrac{p_u'}{p_u}$: $\dfrac{d'}{d} < \dfrac{p_u'}{p_u} \Rightarrow \dfrac{p_u}{d} < \dfrac{p_u'}{d'}$.

Selon (1) : $\dfrac{p_u}{d} < \dfrac{p_u'}{d'} \Rightarrow s_u \le s_u'$ ce qui est la négation de $s_u' < s_u$.

18.Proposition : Jefferson et le paradoxe de l'Oklahoma

La méthode de Jefferson est exempte du paradoxe de l'Oklahoma.

DEMONSTRATION :

Soit $P=(p_1,\cdots,p_i,\cdots,p_k)$ et $P'=(p_1,\cdots,p_i,\cdots,p_{k-1})$. Si il existe un diviseur de Jefferson d tel que $J(P,s)=(s_1,\cdots,s_i,\cdots,s_k)$, alors : $\sum\limits_{i=1}^{k}\left\lfloor\dfrac{p_i}{d}\right\rfloor = s$, et $\forall i=1\cdots k : s_i = \left\lfloor\dfrac{p_i}{d}\right\rfloor$. Donc $\sum\limits_{i=1}^{k-1}\left\lfloor\dfrac{p_i}{d}\right\rfloor = s - s_k$. Donc d est aussi un diviseur pour $(P, s-s_k)$ et $\forall i=1\cdots k-1 : s_i' = s_i = \left\lfloor\dfrac{p_i}{d}\right\rfloor$.

En l'absence de diviseur de Jefferson, on peut se fonder sur l'observation suivante :

Si dans la boucle de l'algorithme d'Hondt, exécuté avec (P,s) comme argument, on saute toutes les étapes j attribuant un siège à E_k, on obtient la répartition : $(s_1,\cdots,s_i,\cdots,s_{k-1},0)$. Or le déroulement de cette algorithme « modifié »est équivalent au déroulement de l'algorithme d'Hondt « normal » avec $(P, s-s_k)$ comme argument.

19.Proposition : Jefferson et les fusions

La méthode de Jefferson est favorable aux fusions.

DEMONSTRATION (*en supposant l'existence d'un diviseur de Jefferson*) :

Soit $P=(p_1,\cdots,p_i,\cdots,p_k)$ et $P'=(p_1,\cdots,p_i,\cdots,p_{k-2},p_{k-1}+p_k)$. Si il existe un diviseur de Jefferson d tel que $J(P,s)=(s_1,\cdots,s_i,\cdots,s_k)$, alors : $\sum_{i=1}^{k}\left\lfloor \frac{p_i}{d}\right\rfloor = s$, et $\forall i=1\cdots k : s_i=\left\lfloor \frac{p_i}{d}\right\rfloor$.

$$\left\lfloor \frac{p_{k-1}+p_k}{d}\right\rfloor = \begin{cases} \left\lfloor \frac{p_{k-1}}{d}\right\rfloor + \left\lfloor \frac{p_k}{d}\right\rfloor = s_{k-1}+s_k \\ \text{ou} \\ \left\lfloor \frac{p_{k-1}}{d}\right\rfloor + \left\lfloor \frac{p_k}{d}\right\rfloor + 1 = s_{k-1}+s_k+1 \end{cases}$$

1. Dans le premier cas : $\sum_{i=1}^{k-2}\left\lfloor \frac{p_i}{d}\right\rfloor + \left\lfloor \frac{p_{k-1}+p_k}{d}\right\rfloor = s$ d. est un diviseur de Jefferson pour (P',s) et $J(P',s)=(s_1,\cdots,s_i,\cdots,s_{k-1}+s_k)$.
2. Dans le deuxième cas : $\sum_{i=1}^{k-2}\left\lfloor \frac{p_i}{d}\right\rfloor + \left\lfloor \frac{p_{k-1}+p_k}{d}\right\rfloor = s+1$ d. est un diviseur de Jefferson pour $(P',s+1)$ et $J(P',s+1)=(s_1,\cdots,s_i,\cdots,s_{k-1}+s_k+1)$. De $(P',s+1)$ à (P',s), un état au plus perd un siège donc $J(P',s)=(s'_1,\cdots,s'_i,\cdots,s'_{k-1})$ avec $s'_{k-1}=s_{k-1}+s_k+1$ ou $s'_{k-1}=s_{k-1}+s_k$.

Dans tous les cas : $s'_{k-1}\geq s_{k-1}+s_k$.

Et leurs épigones : variantes des méthodes des pères fondateurs

Variantes de Jefferson

Compte tenu que les démonstrations concernant les méthodes d'Adams et de Webster sont calquées sur celles concernant Jefferson, nous limiterons, pour l'essentiel, à donner, sous forme de procédures Maple, les algorithmes correspondant à ces méthodes.

Méthode d'Adams

Il suffit de modifier ce que nous avons appelé liste de mérite à l'étape j pour l'algorithme d'Hondt :

$$M^j = \left(\frac{p_1}{s_1^j+1},\cdots,\frac{p_i}{s_i^j+1},\cdots,\frac{p_k}{s_k^j+1}\right)$$

Par :

$$M^j = \left(\frac{p_1}{s_1^j},\cdots,\frac{p_i}{s_i^j},\cdots,\frac{p_k}{s_k^j}\right)$$

Petit problème : à l'étape initiale $j=0$, $M^0=(+\infty,\cdots,+\infty)$. Pour le résoudre on commence par attribuer un siège à chacun des états, puis à démarrer la boucle à $j=k+1$ au lieu de $j=1$.

Procédure Maple : adams()

```
adams:=proc(P,s)
local i,j,u,imax,mmax,k,p,M,S;
k:=nops(P);
p:=sum(P[i],i=1..k);
S:=[seq(1,i=1..k)];
M:=[seq(P[i],i=1..k)];
  for j from k+1 to s do
  mmax:=M[1];imax:=1;
    #début boucle déterminant imax
    for u from 2 to k do
        if M[u]>mmax then mmax:=M[u]; imax:=u;fi;
    od;
    # fin boucle déterminant imax
  S[imax]:=S[imax]+1;
  M[imax]:= P[imax]/(S[imax]);
  od;
RETURN(S);
end:
```

Voici l'équivalent du lemme 11 pour l'algorithme d'Adams :

20.Lemme

À toute étape $j=k\cdots s$ *de l'algorithme d'Adams, on a, en convenant* $\frac{p_i}{0}=+\infty$ *:*

$$\max_{i=1\cdots k}\left(\frac{p_i}{s_i^j}\right)\le\min_{i=1\cdots k}\left(\frac{p_i}{s_i^j-1}\right)$$

Méthode de Webster

Il suffit de modifier ce que nous avons appelé liste de mérite à l'étape j pour l'algorithme d'Hondt :

$$M^j = \left(\frac{p_1}{s_1^j+1},\cdots,\frac{p_i}{s_i^j+1},\cdots,\frac{p_k}{s_k^j+1}\right)$$

Par :

$$M^j = \left(\frac{p_1}{s_1^j + 1/2}, \cdots, \frac{p_i}{s_i^j + 1/2}, \cdots, \frac{p_k}{s_k^j + 1/2} \right)$$

Procédure Maple : webster()

```
webster:=proc(P,s)
local i,j,u,imax,mmax,k,p,M,S;
k:=nops(P);
p:=sum(P[i],i=1..k);
S:=[seq(0,i=1..k)];
M:=[seq(2*P[i],i=1..k)];
  for j from 1 to s do
  mmax:=M[1];imax:=1;
    # début boucle déterminant imax
    for u from 2 to k do
        if M[u]>mmax then mmax:=M[u]; imax:=u;fi;
    od;
    # fin boucle déterminant imax
  S[imax]:=S[imax]+1;
  M[imax]:= P[imax]/(S[imax]+1/2);
  od;
RETURN(S);
end:
```

Voici l'équivalent du lemme 11 pour l'algorithme de Webster :

21.Lemme

À toute étape $j = 1 \cdots s$ *de l'algorithme de Webster, on a, en convenant* $\frac{p_i}{0} = +\infty$ *:*

$$\max_{i=1\cdots k} \left(\frac{p_i}{s_i^j + 1/2} \right) \leq \min_{i=1\cdots k} \left(\frac{p_i}{s_i^j - 1/2} \right)$$

Huntington-Hill

Cette méthode, en usage actuellement pour la Chambre des Représentants des USA, a été brièvement évoquée en première partie. Dans sa version algorithmique, elle repose sur la liste de mérite suivante :

$$M^j = \left(\frac{p_1}{\sqrt{s_1^j \left(s_1^j + 1 \right)}}, \cdots, \frac{p_i}{\sqrt{s_i^j \left(s_i^j + 1 \right)}}, \cdots, \frac{p_k}{\sqrt{s_k^j \left(s_k^j + 1 \right)}} \right)$$

C'est certes plus tarabiscoté : là où Webster fait la moyenne arithmétique entre s_i^j et $s_i^j + 1$, Huntington-Hill fait une moyenne géométrique. Mais cette méthode enfreint les quotas beaucoup plus fréquemment que Webster.

Méthode des quotas de Balinski-Young

22. Théorème : Balinski-Young

Toute méthode respectant la règle des quotas est vulnérable au paradoxe de la population et au paradoxe de l'Oklahoma.

DEMONSTRATION :

Il suffit d'exhiber un exemple où le respect des quotas conduit au paradoxe :

Paradoxe de la population :

Considérons l'exemple suivant où les populations de 5 états évoluent entre 2 dates, avec 9 sièges à pourvoir :

États	p_i	q_i	p_i'	q_i'	taux de variation p_i'/p_i
E_1	718	3,989	902	5,011	25,6%
E_2	359	1,994	120	0,667	-66,6%
E_3	91	0,506	120	0,667	31,9%
E_4	92	0,511	118	0,656	28,3%
E_5	360	2	360	2	0,0%
Total	1 620	9	1 620	9	

De la méthode de répartition, on sait seulement qu'elle respecte les quotas.

- ✓ À la date 1, le respect des quotas impose :
  $3 \le s_1 \le 4$, $1 \le s_2 \le 2$, $s_5 = 2$ et pour $i = 3,4 : 0 \le s_i \le 1$. Par ailleurs $q_4 > q_3$ donc $s_4 \ge s_3$. Tenant compte de ces contraintes, les seules répartitions de 9 sièges qui conviennent sont :
  $$(3,2,1,1,2),\ (4,1,1,1,2),\ (4,2,0,1,2)$$
- ✓ À la date 2, le respect des quotas impose :
  $5 \le s_1 \le 6$, $s_5 = 2$ et pour $i = 2,3,4 : 0 \le s_i \le 1$. Il reste donc au plus 2 sièges à répartir entre E_2, E_3, E_4. Comme $q_4 < q_2 = q_3$, c'est l'état E_4 qui se trouve privé de siège.

Dans tous les cas E_1 gagne un siège (au moins) et E_4 en perd un. Or le taux de variation de la population de E_4 (28,3%) est strictement supérieur au taux de variation de E_1 (25,1%) : manifestation claire du paradoxe de la population.

Paradoxe de l'Oklahoma

Considérons l'exemple suivant où 4 états doivent se partager 7 sièges. Une méthode de répartition respectueuse des quotas conduit au résultat suivant :

États	p_i	q_i	s_i
E_1	52	3,008	**4**
E_2	34	1,967	**1**
E_3	18	1,041	1
E_4	17	0,983	1
Total	121	7	7

Si, maintenant l'état E_4 vient à disparaître et avec lui le siège qu'il occupait, le respect des quotas va imposer la répartition suivante :

États	p_i	q_i	s_i
E_1	52	3	**3**
E_2	34	1,962	**2**
E_3	18	1,038	1
Total	104	6	6

Et donc modifier l'allocation des sièges pour E_1 et E_2 : manifestation claire du paradoxe de l'Oklahoma.

La méthode des quotas

Comme indiqué en première partie, l'algorithme de Balinski-Young reprend le schéma d'Hondt, en veillant qu'à chaque étape on reste dans les clous. Si $S^j = \left(s_1^j, \cdots, s_i^j, \cdots, s_k^j\right)$ est la répartition effectuée par un algorithme de ce type à l étape j, être dans les clous veut dire respecter les quotas partiels en ayant distribué j sièges :

$$\forall i = 1 \cdots k : \left\lfloor \frac{p_i}{p} j \right\rfloor \leq s_i^j \leq \left\lceil \frac{p_i}{p} j \right\rceil$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall i = 1 \cdots k : \frac{p_i}{p} j - 1 < s_i^j < \frac{p_i}{p} j + 1$$

Pour des raisons qui apparaîtront ultérieurement, nous ne tiendrons compte que de la borne supérieure et poserons la définition suivante : On dira qu'un état E_i est éligible pour l'étape $j+1$, si il peut recevoir un siège supplémentaire à l'étape $j+1$ sans enfreindre les quotas supérieurs.

$$E_i \text{ éligible pour l'étape } j+1 \Leftrightarrow s_i^j + 1 < \frac{p_i}{p}(j+1) + 1 \Leftrightarrow s_i^j < \frac{p_i}{p}(j+1)$$

L'ensemble des états éligibles pour l'étape $j+1$ sera noté EL^j

On peut remarquer :

- ✓ $s_i^0 = 0$ donc tous les états sont éligibles pour l'étape 1 .
- ✓ Pour $j = 0 \cdots s-1$, $EL_j \neq \varnothing$. En effet, si $EL_j = \varnothing$, on aurait :

  $\forall i = 1 \cdots k : \frac{p_i}{p}(j+1) \leq s_i^j \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \frac{p_i}{p}(j+1) \leq \sum_{i=1}^{k} s_i^j \Rightarrow j+1 \leq j$

L'algorithme d'Hondt est alors modifié ainsi :

- ✓ Initialement, à l'étape $j=0$, pour tout i, $s_i^0 = 0$ et $M^0 = \left(p_1, \cdots, p_i, \cdots, p_k\right) = P$. Tous les états sont éligibles pour l'étape 1. Le premier siège est attribué à l'état $\arg\max(P)$, c'est-à-dire à l'état le plus peuplé.
- ✓ Ensuite, pour passer de l'étape j à l'étape $j+1$, un siège est attribué à $m = \underset{i \in EL^j}{\arg\max}\left(M_i^j\right)$:

$$s_i^j = \begin{cases} s_i^{j-1} + 1 & \text{si } i = m \\ s_i^{j-1} & \text{si } i \neq m \end{cases}$$

Et le processus se poursuit jusqu'à garniture de tous les sièges.

La différence avec l'algorithme initial est claire : on recherche le maximum de $\frac{p_i}{s_i^j+1}$ parmi les états éligibles pour l'étape $j+1$ et non parmi tous les états.

La conséquence de ce nouveau procédé d'allocation des sièges est aussi claire : le respect des quotas supérieurs. Mais qu'en est-il des quotas inférieurs ? La réponse est apporté par le résultat suivant du encore à Balinski-Young :

23.Proposition

La méthode des quotas de Balinski-Young respecte les quotas supérieurs et inférieurs tout en étant exempte du paradoxe de l'Alabama.

COMMENTAIRE :

Le respect des quotas supérieurs est une conséquence immédiate de l'éligibilité.

Comme cela a déjà été dit, a distribution des sièges un par un immunise contre le paradoxe de l'Alabama.

Pour le respect des quotas inférieurs, nous ne donnerons pas de démonstration et renverrons à celle de Balinski-Young. Voici cependant une esquisse d'explication :

- ✓ Tant que la clause d'inéligibilité n'agit pas, la distribution des sièges un par un est la même qu'avec Hondt.
- ✓ Quand elle agit à une étape, c'est qu'un état est à la fois le plus méritant et inéligible pour l'étape suivante. Un autre alors état bénéficie du siège.
- ✓ Mais l'état frappé d'inéligibilité reste le plus méritant et le reste. Si bien que dès qu'il n'est plus inéligible, il va recevoir (certes avec retard) le siège dont il avait été privé.

Procédure Maple : byquota()

```
byquota:=proc(P,s)
local i,j,u,imax,mmax,k,v,p,M,S,EL;
k:=nops(P);
p:=sum(P[i],i=1..k);
S:=[seq(0,i=1..k)];
M:=copy(P);EL:=copy(P);
  for j from 1 to s do
  mmax:=EL[1];imax:=1;
      # boucle déterminant imax parmi les éligibles
      for u from 2 to k do
      if EL[u]>mmax then mmax:=EL[u];imax:=u;fi;
      od;
      # fin boucle déterminant imax
    S[imax]:=S[imax]+1;
    M[imax]:= P[imax]/(S[imax]+1);
    # Mise à jour de la liste d'éligibilité pour l'étape suivante
      for u from 1 to k do
      if S[u]<P[u]*(j+1)/p then EL[u]:=M[u]; else EL[u]:=-1; fi;
       od;
   od;
RETURN(S);
end:
```

Dans cette procédure, la prise en compte de l'éligibilité se fait en gérant en parallèle avec la « liste de mérite » `M[ ]` une deuxième liste `EL[ ]` définie par :

$$\texttt{EL[i]} = \begin{cases} \texttt{M[i]} & \text{si } \texttt{i} \text{ est éligible} \\ \texttt{-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

Voici un exemple inspiré de Balinski-Young, où toutes les méthodes « à diviseur », Webster compris (ce qui est rare), sortent des clous tandis que la méthode des quotas s'y maintient :

```
P:=[11945,2110,1175,706];
```

$$P := [11945, 2110, 1175, 706]$$

```
p:=sum(P[i],i=1..4);
```

$$p := 15936$$

```
Qinf:=[seq(floor(P[i]*35/p),i=1..4)];Qsup:=[seq(ceil(P[i]*35/p),i=1..4)];
```

$$Qinf := [26, 4, 2, 1]$$

$$Qsup := [27, 5, 3, 2]$$

```
J:=hondt(P,35);W:=webster(P,35);A:=adams(P,35);Q:=quota(P,35);
```

$$J := [28, 4, 2, 1]$$

$$\mathrm{W} := [25, 5, 3, 2]$$

$$A := [25, 5, 3, 2]$$

$$Q := [27, 5, 2, 1]$$

Bibliographie

1 BALINSKI M, YOUNG H. *Fair Representation: Meeting the Ideal of One Man, One Vote*, New Haven et Londres, Yale University Press, 1982, Brookings Institution (2001).

2 BALINSKI M, YOUNG H. *The quota method of apportionment*, The American Mathematical Monthly 82(7):701-730 · 1975
https://www.researchgate.net/profile/Michel_Balinski/publication/236013371_The_Quota_Method_of_Apportionment/links/004635326cfd34b8ac000000/The-Quota-Method-of-Apportionment.pdf

3 GRIMMETT G. ET AUTRES, *Compromis de Cambridge : La répartition des sièges au parlement européen entre les états membres de l'union européenne.*
http://www.europarl.europa.eu/RegData/etudes/note/join/2011/432760/IPOL-AFCO_NT(2011)432760_FR.pdf

4 MAYBERRY J.P. *Quota methods for congressional apportionment are still non-unique*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA,Vol. 75, No. 8, pp. 357-339, August 1978.
https://www.pnas.org/content/pnas/75/8/3537.full.pdf