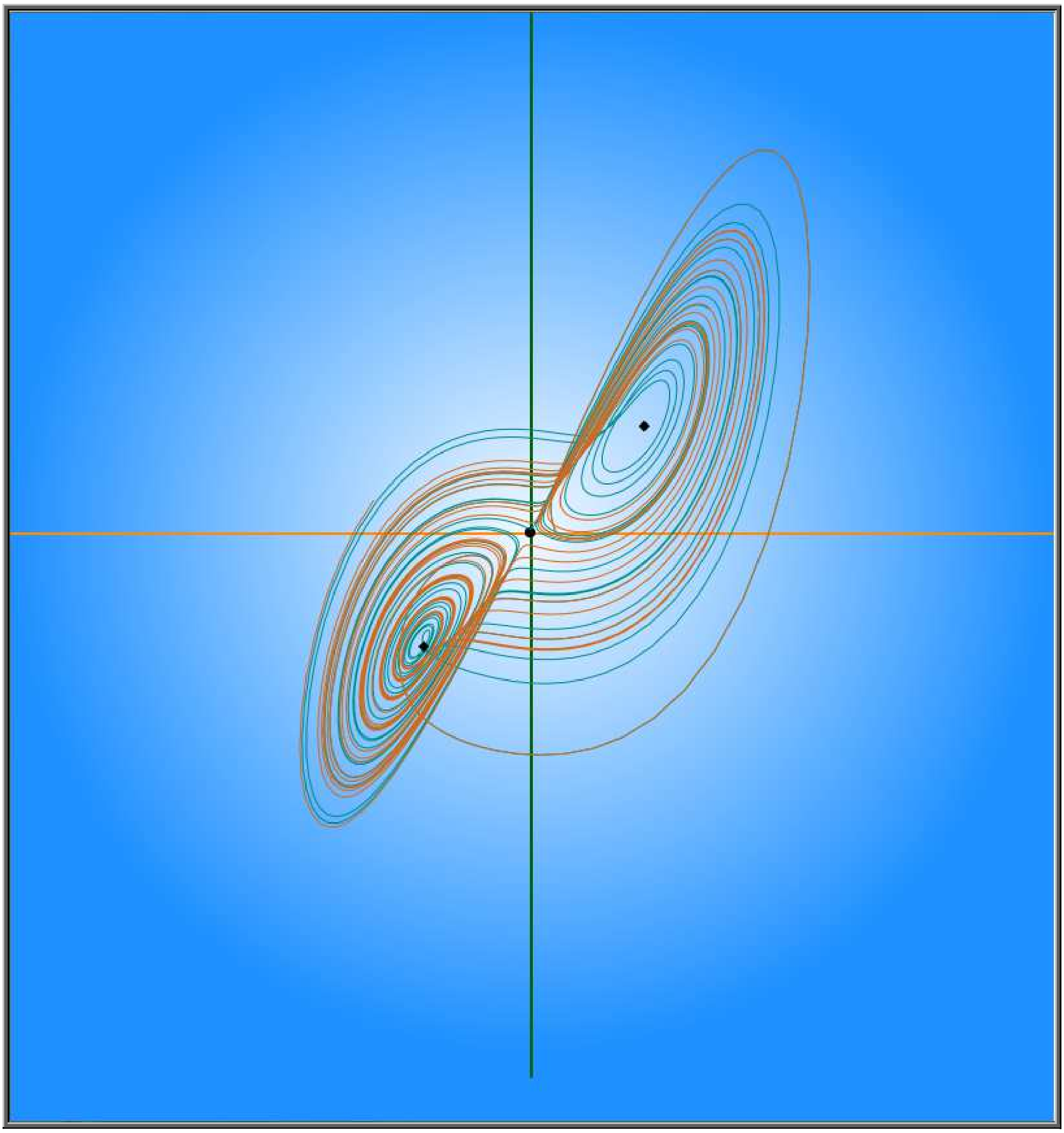
Jacques Cellier



Deux applications pour le Papillon de Lorenz

Un peu d'histoire

En 1963, Edward Lorenz, météorologue et mathématicien américain, établit un système d'équation pour modéliser la circulation atmosphérique. Il s'agit d'un système très, très simplifié que lui-même appelait son « atmosphère-jouet ». Dans ce système l'état de l'atmosphère est décrit par 3 variables x, y ,z et son évolution au cours du temps t est décrite par le système d'équation différentielle :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y \\ \dfrac{dx}{dt} = rx - y - xz \\ \dfrac{dx}{dt} = xy - bz \end{cases}$$

Où σ, r et b sont des paramètres que, pour des considérations physiques, il avait fixé aux valeurs suivantes : $\sigma = 10, r = 28, b = 8/3$.

Partant d'un état initial de l'atmosphère décrit par des valeurs x_0, y_0, z_0, le but du jeu était de prévoir l'évolution de l'atmosphère au cours du temps.

Mais bien que, comme on l'a dit, il s'agisse d'un modèle très, très simplifié, on n'en connaît pas de solutions analytiques, autrement dit exprimables à l'aide de fonctions usuelles. Aussi, Lorenz utilisa un ordinateur[1] pour se livrer à une exploration numérique. Ce faisant, il découvrit qu'une infime modification des conditions initiales pouvait amener à des évolutions très, très différentes de l'« atmosphère-jouet ».

Le chaos déterministe réside dans cette extrême sensibilité aux paramètres ou aux conditions initiales. Ce phénomène est connu, en version « grand public », sous le nom « d'effet papillon » où il donne lieu à des interprétations fantaisistes de la boutade d'Edward Lorenz:

> « *Le battement d'ailes d'un papillon au Brésil peut-il provoquer une tornade au Texas ?* »

Les deux citations suivantes de Lorenz viennent effectivement préciser le fond de sa pensée sur le sujet :

« Si un battement d'ailes d'un papillon peut engendrer un ouragan, la même chose est vraie pour tous les autres battements d'ailes du même papillon, mais aussi pour les battements d'ailes des millions d'autres papillons, sans parler de l'influence des activités des innombrables autres créatures plus puissantes, comme les hommes par exemple ! Et si un battement d'ailes d'un papillon peut engendrer un ouragan, il peut tout aussi bien l'empêcher. »

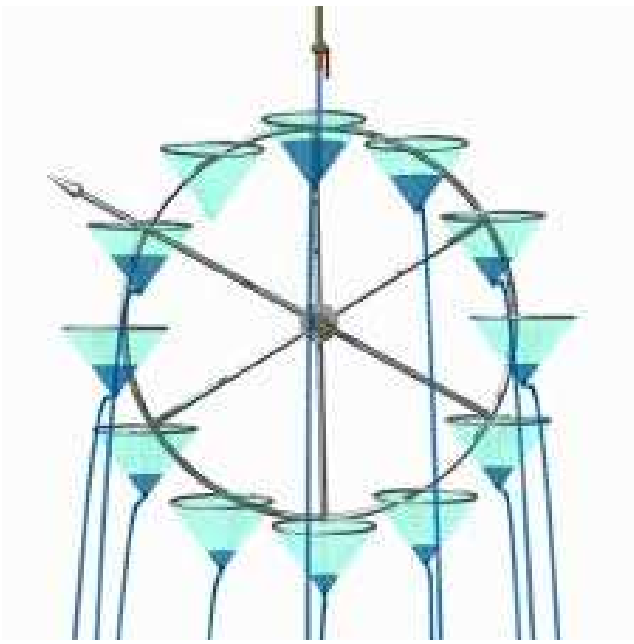
« J'avance l'idée qu'au fil des années les petites perturbations ne modifient pas la fréquence d'apparition des événements tels que les ouragans : la seule chose qu'ils peuvent faire, c'est de modifier l'ordre dans lequel ces événements se produisent. »

[1] En 1963, les ordinateurs étaient beaucoup plus rudimentaires (cartes perforées !) et un million de fois plus lent qu'un ordinateur basique d'aujourd'hui.

Une machine chaotique : le moulin de Lorenz

Deux mathématiciens américains W. Malkus et L. Howard ont imaginé une machine hydraulique dont la construction est à la portée d'un bon bricoleur pour concrétiser une situation chaotique :

Moulin de Lorenz construit avec une roue de bicyclette et des entonnoirs et un robinet pour amener l'eau



Moulin schématique

Pour le voir fonctionner dans une animation, vous pouvez vous rendre sur le site :

http://images.math.cnrs.fr/Le-moulin-a-eau-de-Lorenz.html

Il se trouve que le comportement de ce moulin est régi par les mêmes équations que celles établies par Lorenz pour modéliser son « atmosphère-jouet ». Et les 3 variables sont, pour le moulin, plus accessibles que celles de l'« atmosphère-jouet » :

- ✓ x qui représente la vitesse de rotation de la roue (positive ou négative selon le sens de rotation) est facile à visualiser.
- ✓ y et z représentent les coordonnées du centre de gravité de la roue. Elles sont, certes plus difficiles à visualiser, mais leur rôle est facile à comprendre : pour que la roue se mette en mouvement il faut que son centre de gravité s'écarte de l'axe de rotation.

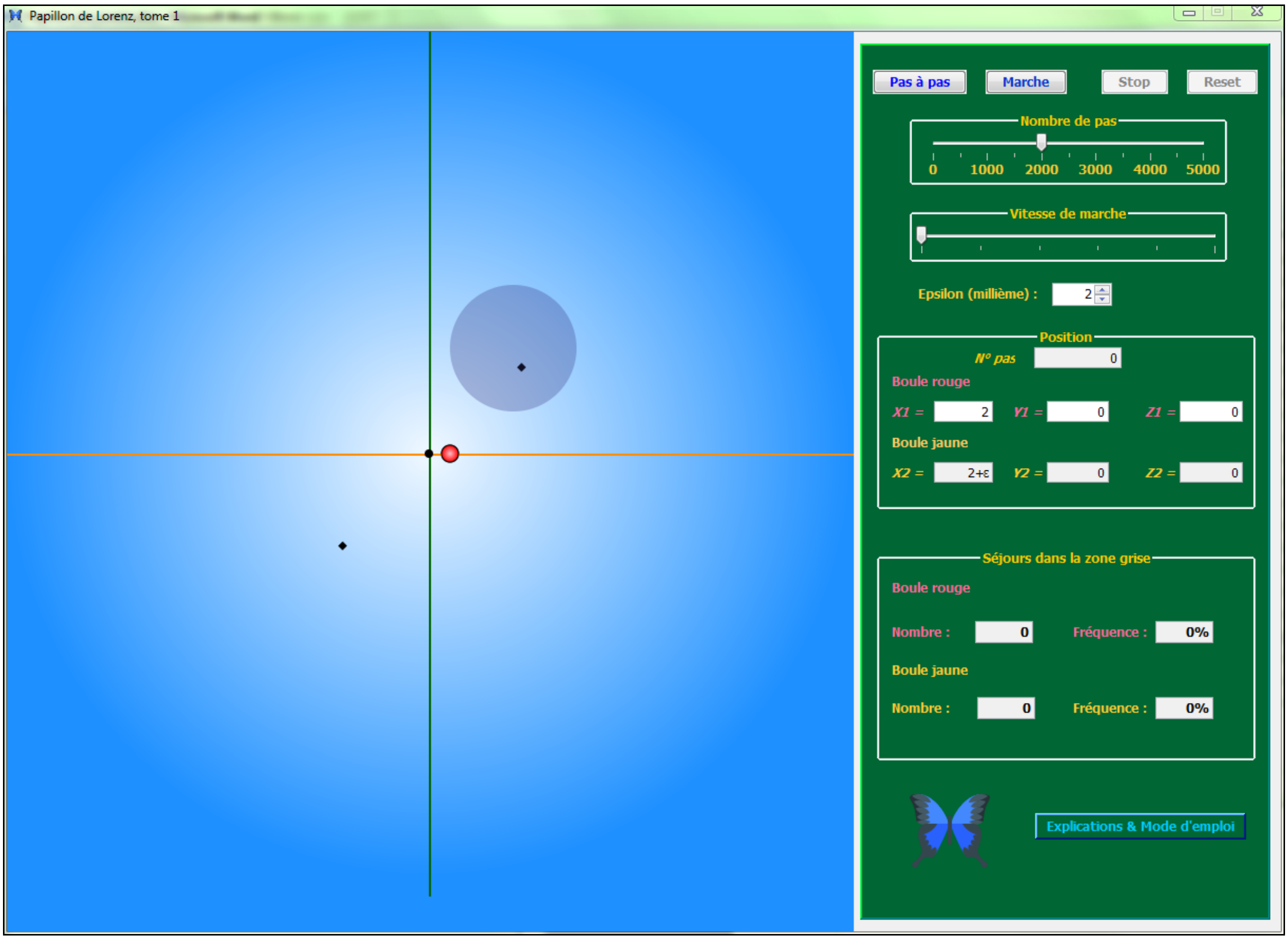
Les 2 applications illustratives

Les deux applications présentées ci-dessous visent à mettre en évidence :

- ✓ La sensibilité aux conditions initiales pour la première.
- ✓ La « stabilité statistique » pour la seconde.

Ces deux applications écrites en Java nécessitent l'installation de Java 8 sur l'ordinateur. Les deux fichiers `.jar` ne doivent pas être séparés du dossier `lib` qui les accompagne. Pour lancer ces applications sous Windows, il suffit d'un double clic sur le nom du fichier. Sous Linux, il faut recourir à la commande `java -jar xxx.jar`.

`Lorenz_1.jar`



Description de la scène

Vous voyez devant vous un axe horizontal X et un axe vertical Y et une boule rouge. En fait, comme le mouvement de la boule va se dérouler en 3 dimensions, il existe un troisième axe Z dirigé vers vous. La taille de la boule permet de rendre compte de la profondeur de champ : si la boule avance vers vous elle grossit. Si vous cliquez plusieurs fois sur le bouton PAS_A_PAS, vous verrez la boule rouge se déplacer en marquant sa trace et en révélant l'existence d'une boule jumelle jaune. La boule qui est la plus proche du spectateur, fusse de très très peu, masque totalement ou partiellement l'autre. Pour remettre tout en place, cliquez le bouton RESET

Qu'est ce qui régit le mouvement des boules ?

Le ballet de ces deux boules dans l'espace est gouverné par le même système d'équations : les équations de Lorenz. Pour être plus exact, ces équations concernent le centre de ces boules lesquelles ont pour fonction de rendre ce ballet plus visuel. La seule différence entre les deux boules réside dans un très léger écart ε, imperceptible visuellement, entre leur position initiale.

Marche itérée

Le bouton MARCHE lance les deux boules dans une excursion qui peut alller jusqu'à 5000 pas. Il ne reste plus qu'à observer le jeu de boules... A tout moment, la marche peut être interrompue par le bouton STOP puis reprise par le bouton MARCHE. Le panneau POSITIONS affiche le nombre de pas effectués et les coordonnées des deux boules.

La zone grise

Dans la scène, on peut observer la présence d'un disque gris. Les passages des boules dans cette zone sont comptés et affichés dans le panneau SEJOURS_DANS_LA_ZONE_GRISE. Avant de lancer la marche, cette zone grise peut être déplacée à la souris.

Les points fixes

Dans la scène on peut encore observer la présence de 3 points l'un au centre, les deux autres disposés symétriquement. Ce sont les points fixes de la dynamique qui gouverne le mouvement des boules. Ce qui signifie que si une boule se trouve exactement sur un de ces points elle y restera indéfiniment. Mais ces points fixes sont plutôt répulsifs.

Réglages et détails de fonctionnement

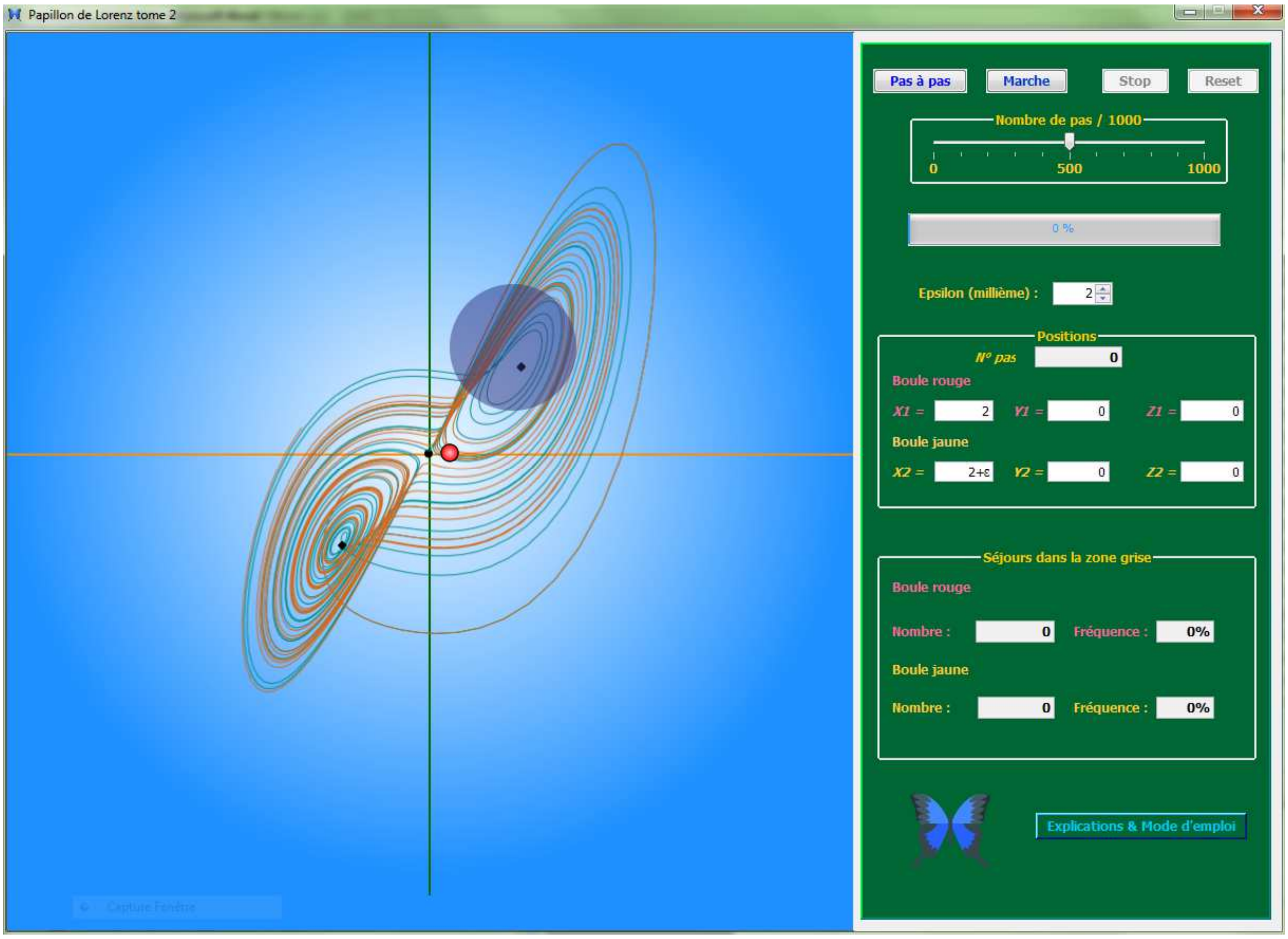
- ✓ Deux glisseurs permettent de régler la vitesse de la marche et le nombre maximal de pas dans la marche, marche qui peut être interrompue avant ce terme par le bouton STOP, puis éventuellement relancée.
- ✓ Un « spinner » permet de régler l'écart initial entre les deux boules ε entre -5/1000 et +5/1000
- ✓ Il est possible de combiner successivement le mode PAS_A_PAS et le mode MARCHE. Mais il faut savoir que le mode PAS_A_PAS ne meut que la boule rouge.

- ✓ Dans le panneau POSITIONS, on peut modifier la position initiale $(X=2, Y=0, Z=0)$ de la boule rouge. Les nouvelles valeurs doivent être comprises entre -20 et +20. Ces modifications doivent être validées par ENTER et sont répercutées pour la boule jaune en maintenant l'écart de ε.
- ✓ Le bouton RESET remet tout le dispositif dans son état originel.

Ce que l'on peut observer

A partir de la position initiale, on ne verra, dans un premier temps, qu'une seule boule (rappelons qu'à l'origine, elles sont très proches l'une de l'autre au point de se masquer), tisser une figure dans l'espace composée de deux « ailes de papillon ». Puis, au bout d'environ 800 pas, les deux boules vont se séparer et vont cheminer de façon indépendante tout en continuant à tisser le papillon.
Si l'on part d'une autre position initiale, par exemple $(X=20, Y=20, Z=-10)$, on pourra, voir, au bout de quelques pas, les boules se mettre à redessiner le papillon. Tout se passe comme si, dans leur course, les boules étaient attirées par un objet mystérieux : l'attracteur « étrange » de Lorenz.

Lorenz_2.jar



Description de la scène

La scène ressemble de près à celle du tome 1, à ceci près que l'on a dessiné par avance le « papillon ». Pour cette deuxième mouture, l'objectif est de mettre en évidence le phénomène suivant : partant de positions initiales des boules différentes, au bout d'un certain nombre de pas, les fréquences des séjours des deux boules dans la zone grise sont très proches l'une de l'autres, bien que les mouvements des boules diffèrent totalement. Mais la mise en évidence de ce phénomène exige un très grand nombre de pas, ce qui nécessite une modification de l'interface.

Changement de l'interface

- ✓ Le nombre de pas peut aller jusqu'à 1 000 000.
- ✓ L'affichage du ballet des boules a été simplifié. Pas de trace des trajectoires (le papillon est déjà dessiné). Accélération importante de l'affichage du mouvement des boules.
- ✓ Suppression de l'affichage continue des positions.
- ✓ Possibilité de modifier la position initiale de la boule jaune en saisissant de nouvelles coordonnées, comprises entre -20 et 20, dans les champs X_2, Y_2, Z_2 (ne pas oublier de valider par ENTER). Ceci afin de permettre un écart initial entre les boules plus important que ε.
- ✓ La possibilité de modifier la position initiale de la boule rouge demeure. Mais alors, la modification est répercutée pour la boule jaune en maintenant l'écart de ε.
- ✓ Le glisseur de réglage de la vitesse disparaît au profit de l'affichage de la progression de la marche, c'est très rapide.

Le reste est inchangé.

Ce que l'on peut observer

D'abord une exécution, même avec 1 000 000 de pas, beaucoup, beaucoup plus rapide. Cela résulte de la suppression de l'affichage continue des positions et des trajectoires qui consommait beaucoup de ressources dans la première mouture.

Mais l'essentiel réside dans la comparaison entre les fréquences de séjours dans la zone grise des deux boules affichées en fin d'itération. L'expérience peut être reconduite en modifiant l'emplacement de la zone grise et les positions initiales des boules.