EXERCICES

ET

PROBLÈMES

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

CHAPITRE 0

PETITES QUESTIONS POUR FAIRE LE POINT

1. Oui :
$\alpha(u+v)+\beta(u-v)=0 \Rightarrow (\alpha+\beta)u+(\alpha-\beta)v=0$. D'où par liberté de (u,v) :
$\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \alpha-\beta=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\end{cases}.$

2. Oui : (u,v,w) génératrice de $\mathbb{R}^3$ implique (Théorème 0.9) (u,v,w) libre. Ce qui implique (Proposition 0.7) la liberté de (u,v).

3. Oui :
$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=0 \Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ \quad\;\; \beta+\gamma=0\\ \qquad\quad \gamma=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\end{cases}.$$

4. Non : exemple $w=u$. La réciproque est vraie (Proposition 0.7).

5. Non : $2X-(X+1)-(X-1)=0$. La liste n'est donc pas libre (ni génératrice).

6. Non : Soit $(P_0,P_1,\cdots P_n)$ une liste finie de polynômes. Si l'on pose $k=\max\left(\deg(P_i)\right)$, il est clair que les combinaisons linéaires des P_i sont de degré inférieur ou égal à *k*. Ce qui interdit à la liste d'être génératrice de $K\left[X\right]$.

7. *F* et *H* sont des sous-espaces. *G* qui ne contient pas le polynôme nul ne saurait l'être.

8. Non : le vecteur nul appartient à tous les sous-espaces.

9. Uniquement si l'un est inclus dans l'autre. Supposons $A\cup B$ sous-espace. Si $A\not\subseteq B$, considérons $a\in A-B$ et $b\in B$. Alors $c=a+b\in A\cup B$. Si $c\in B$, alors $a=c-b$ aussi, ce qui contredit $a\in A-B$. Donc $c\in A$, mais alors $b=c-a$ aussi, donc $B\subseteq A$. La réciproque est évidente.

10. Non : la somme de deux polynômes de degré n peut être de degré $< n$.

11. Le sous-espace des polynômes constants.

12. $f(x)=0 \Rightarrow f^2(x)=0$. Donc $Ker(f) \subseteq Ker(f^2)$.
$y = f^2(x) \Rightarrow y = f\left(f(x)\right)$. Donc $Im(f^2) \subseteq Im(f)$.

13. $Dim\left(K_4\left[X\right]\right)=5$. Selon le théorème du rang, $Ker(f)$ est de dimension 2.

14. Non, sauf si elles sont carrées : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$.

15. Oui : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

16. A^2 est définie si et seulement si $n = p$. $A^t A$ est défini et de taille $p \times p$. AA^t est défini et de taille $n \times n$.

17.

$$M_{(u,v,w)}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(u) & f(v) & f(w) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ u \\ v \\ w \end{array} \qquad M_{(w,v,u)}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(w) & f(v) & f(u) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ w \\ v \\ u \end{array}$$

18.

$$M_{(1,X,X^2)}(D) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} D(1) & D(X) & D(X^2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \end{array}$$

19. Si et seulement si tous les termes de la diagonale sont différents de 0.

20. Non, sauf si elles commutent.

21.

	A	B	C	D	E	F
Dimension espace de départ	2	2	1	3	3	3
Rang	2	1	1	1	2	3
Dimension du noyau	0	1	0	2	1	0

22. Oui : $A^2 + A + I = 0 \Rightarrow A(-A-I) = I$. Donc $A^{-1} = -A - I$.

23. Non pour $A+B$, exemple : $B = -A$. Oui pour AB avec $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

24. Oui dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ les colonnes sont indépendantes. Non dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ où : $2\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \mod(5)$.

25. Oui : si $A^t = A$, $\left(A^t\right)^{-1} = A^{-1}$. Or d'après la proposition 0.28 $\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$. Donc $\left(A^{-1}\right)^t = A^{-1}$ et A^{-1} est symétrique.

1° EXERCICE

Récurrence sur n :

1. Vrai pour $n=0$ où la liste se réduit à un polynôme constant non nul.
2. $\mathcal{H}_{n-1} \Rightarrow \mathcal{H}_n$

   Soit une liste échelonnée $(P_0,\cdots,P_{n-1},P_n)$.

   Alors : $\alpha_0 P_0+\cdots+\alpha_{n-1}P_{n-1}+\alpha_n P_n=0$ implique la nullité de α_n. En effet dans le polynôme de gauche le coefficient de X^n est égal au produit de α_n par le coefficient de X^n dans le polynôme P_n, coefficient non nul puisque P_n est de degré n. Il reste alors à appliquer $\mathcal{H}_{n-1}$ pour conclure à la nullité des autres coefficients de la combinaison linéaire et à la liberté de $(P_0,\cdots,P_{n-1},P_n)$.

2° EXERCICE

Si les $a_{i,i}$ sont tous non nuls :

$$\alpha_1\begin{pmatrix}a_{1,1}\\0\\\vdots\\\vdots\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}a_{1,2}\\a_{2,2}\\0\\\vdots\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots\alpha_k\begin{pmatrix}a_{1,k}\\\vdots\\a_{k,k}\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=0\ \begin{cases}\alpha_1 a_{1,1}+\alpha_2 a_{1,2}+\cdots+\alpha_k a_{1,k}=0\\ \qquad\alpha_2 a_{2,2}+\cdots+\alpha_k a_{2,k}=0\\ \qquad\vdots\\ \qquad\alpha_k a_{k,k}=0\end{cases}$$

Et l'on en déduit que $\alpha_k\neq 0$ et en « remontant » qu'il en est de même pour $\alpha_{k-1},\cdots\alpha_1$

Réciproquement, s'il existe un $a_{i,i}$ nul, alors : les i vecteurs :

$\begin{pmatrix}a_{1,1}\\0\\\vdots\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}a_{1,i}\\\vdots\\a_{i-1,i}\end{pmatrix}$ de K^{i-1} sont liés et les i vecteurs $\begin{pmatrix}a_{1,1}\\0\\\vdots\\\vdots\\\vdots\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}a_{1,i}\\\vdots\\a_{i-1,i}\\0\\\vdots\end{pmatrix}$ de K^n sont liés. Donc la liste $\begin{pmatrix}a_{1,1}\\0\\\vdots\\\vdots\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots\begin{pmatrix}a_{1,i}\\\vdots\\a_{i-1,i}\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots\begin{pmatrix}a_{1,k}\\\vdots\\\vdots\\a_{k,k}\\0\\\vdots\end{pmatrix}$ est liée.

3° EXERCICE

La vérification des axiomes d'espace vectoriel est immédiate.

✓ $\left(1, \sqrt{2}\right)$ libre :

Si $\alpha 1 + \beta\sqrt{2} = 0$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, alors, si l'un des coefficients est non nul l'autre aussi et l'on aurait $\sqrt{2} = -\dfrac{\alpha}{\beta}$ en contradiction avec l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

✓ $\left(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$ libre :

Si $\alpha 1 + \beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt{3} = 0$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$

$\alpha 1 + \beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt{3} = 0 \Rightarrow \alpha 1 + \beta\sqrt{2} = -\gamma\sqrt{3} \Rightarrow \alpha^2 + 2\beta^2 + 2\alpha\beta\sqrt{2} = 3\gamma^2$ et la encore la non nullité d'un coefficient viendrait contredire l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

4° EXERCICE

L_1 libre $\Rightarrow L_2$ libre.

$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_i(u_i + \alpha u_j) + \cdots + \alpha_p u_p = 0 \Rightarrow$

$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_i u_i + \cdots + (\alpha_i\alpha + \alpha_j)u_j + \cdots + \alpha_p u_p = 0$

ce qui entraîne, par liberté de L_1,

$\alpha_k = 0$ pour $k \in \{1 \cdots p\} - \{j\}$ et $\alpha_i\alpha + \alpha_j = 0$ et finalement la nullité de tous les α_k.

Pour la réciproque, on peut observer que L_1 s'obtient à partir de L_2 en ajoutant $-\alpha u_j$ au vecteur d'indice *i* de la liste L_2.

5° EXERCICE

1° Question

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt} e^{-ilt} dt = \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)t} dt$$

$$= \begin{cases} [t]_0^{2\pi} = 2\pi \text{ si } k = l \\ \left[\dfrac{1}{i(k-l)} e^{i(k-l)t}\right]_0^{2\pi} = \dfrac{1}{i(k-l)}(e^{i2\pi} - 1) = 0 \text{ si } k \neq l \end{cases}$$

2° Question

Avec la notation $f_k(t) = e^{ikt}$, ce résultat s'écrit :

$\int_0^{2\pi} f_k f_l = \begin{cases} 2\pi \text{ si } k = l \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

En partant de $\alpha_p f_p + \cdots + \alpha_i f_i + \cdots + \alpha_n f_n = 0$, on obtient, en multipliant par f_i et en intégrant, pour tout $i \in \{p \cdots n\}$:

$$\alpha_p \underbrace{\int_0^{2\pi} f_i f_p}_{=0} + \cdots + \alpha_i \underbrace{\int_0^{2\pi} f_i f_i}_{=2\pi} + \cdots + \alpha_n \underbrace{\int_0^{2\pi} f_i f_n}_{=0} = 0$$

donc $\alpha_i = 0$.

3° Question

Il suffit d'utiliser les formules d'Euler : $c_i = \frac{1}{2}(f_i + f_{-i}) \quad s_i = \frac{1}{2i}(f_i - f_{-i})$ pour se ramener à la question précédente. Pour les cosinus :

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (f_i + f_{-i}) = 0 \Rightarrow \sum_{\substack{i=n \\ i \neq 0}}^{n} \alpha_{|i|} f_i = 0$ et tous les coefficients sont nuls puisque : $(f_{-n}, f_{-1}, f_1, \cdots, f_n)$ est libre.

6° PROBLÈME

1° Question

- ✓ La linéarité de Δ relève de la vérification immédiate.

- ✓ $Ker(\Delta) = K_0[X]$ (les polynômes constants) :

Si $P \in K_0[X]$, $P(X+1) = P(X)$ et $\Delta(P) = 0$.

Réciproquement :

Si $\Delta(P) = 0$, alors $P(X+1) = P(X)$. Donc, pour tout entier *k*, $P(k) = P(0)$. Le polynôme $P(X) - P(0)$ a une infinité de racines et est donc nul. D'où $P(X) = P(0)$.

- ✓ $Im(\Delta) = K_{n-1}[X]$

$\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$, donc $Im(\Delta) \subseteq K_{n-1}[X]$.

Pour l'inclusion réciproque, le théorème du rang (0.14) montre que $Dim(Im(\Delta)) = n = Dim(K_{n-1}[X])$. De l'inclusion et de l'égalité des dimensions, la proposition 0.10 permet de conclure à l'égalité entre $Im(\Delta)$ et $K_{n-1}[X]$.

- ✓ Matrice de Δ dans la base canonique

  $\Delta(1)=0$

  $\Delta(X)=1$

  $\vdots$

  $\Delta(X^j)=(X+1)^j-X^j=1+C_j^1X+\cdots+C_j^{j-1}X^{j-1}$

D'où :

$$M(\Delta)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 0 & 2 & & C_j^1 & & C_n^1 \\ & & 0 & & \vdots & & \\ & & & \ddots & C_j^{j-1} & & \\ & & & & 0 & & \\ \vdots & & & & & \ddots & C_n^{n-1} \\ 0 & \cdots & & & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- ✓ Nullité de Δ^{n+1}

Comme $\deg\left(\Delta(P)\right)=\deg\left(P\right)-1$, en itérant au plus n fois , $\deg\left(\Delta^n(P)\right)$ sera nul et donc $\Delta^{n+1}(P)=0$.

2° Question

$\left(F_0(X),F_1(X),\cdots,F_n(X)\right)$ est une liste échelonnée de polynômes donc libre (exercice 1). Son nombre de vecteurs $n+1$ correspond exactement à la dimension de $K_n\left[X\right]$, elle constitue donc une base (théorème 0.9).

- ✓ $\Delta(F_0)=0$ (évident)
- ✓ $\Delta(F_i)=F_i(X+1)-F_i(X)$. Pour clarifier les écritures, remarquons que :

  $F_i(X)=\dfrac{1}{i!}X(X-1)\cdots(X-i+1)$; D'où :

$$\begin{aligned}\Delta(F_i)&=\frac{1}{i!}(X+1)\underline{X\cdots(X-i+2)}-\frac{1}{i!}\underline{X\cdots(X-i+2)}(X-i+1)\\ &=\frac{1}{i!}(X)\cdots(X-i+2)\left(X+1-X+i-1\right)\\ &=\frac{1}{(i-1)!}(X)\cdots(X-i+2)\\ &=F_{i-1}\end{aligned}$$

En conséquence, la matrice de Δ dans cette base est :

$$M(\Delta)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

3° Question

Vrai si P est constant $P = P(0)$.

Supposons $\mathcal{H}_{n-1}$ vraie et soit P un polynôme de degré n. Il se décompose dans la base $\left(F_0, F_1, \cdots, F_n\right)$: $P = a_0 F_0 + a_1 F_1 + \cdots a_n F_n$. Et donc :

$\Delta(P) = a_0 \Delta(F_0) + a_1 \Delta(F_1) + \cdots + a_n \Delta(F_n) = a_1 F_0 + a_2 F_1 + \cdots + a_n F_{n-1}$.

En appliquant $\mathcal{H}_{n-1}$ à $\Delta(P)$ de degré n-1, il vient :

$\Delta(P) = \Delta(P)(0) F_0 + \Delta^2(P)(0) F_1 + \cdots + \Delta^n(P)(0) F_{n-1}$.

La décomposition dans une base étant unique :

$a_1 = \Delta(P)(0), a_2 = \Delta^2(P)(0), \cdots, a_n = \Delta^n(P)(0)$. Donc $P = a_0 F_0 + \Delta(P)(0) F_1 + \Delta^2(P)(0) F_2 \cdots \Delta^n(P)(0) F_n$. Il ne manque que le coefficient a_0. Mais comme $F_0(0) = 1$ tandis que $F_1(0) = F_2(0) = \cdots F_n(0) = 0$, il suffit de faire $X = 0$ dans l'égalité précédente pour obtenir $a_0 = P(0)$, ce qui prouve $\mathcal{H}_n$.

4° Question : application numérique

Avec les valeurs indiquées :

x	0	1	2	3
$P(x)$	1	2	0	-1
$\Delta P(x)$	1	-2	-1	
$\Delta^2 P(x)$	-3	1		
$\Delta^3 P(x)$	4			

$$\begin{aligned} P(X) &= 1F_0 + 1F_1 - 3F_2 + 4F_3 \\ &= 1 + X - \frac{3}{2!} X(X-1) + \frac{4}{3!} X(X-1)(X-2) \end{aligned}$$

7° EXERCICE

1° Question

Vérification immédiate.

2° Question

Soit $A=\begin{pmatrix} \underline{a} & b & \underline{c} \\ d & \underline{e} & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}$, en se concentrant sur les deux diagonales et la deuxième ligne, on obtient :

$$\begin{cases} a+e+i=S \\ d+e+f=S \Rightarrow \underbrace{(a+d+g)}_{=S}+3e+\underbrace{(i+f+c)}_{=S}=3S \Rightarrow 3e=S \\ g+e+c=S \end{cases}.$$

Il suffit alors de calculer *b, h, i, g, d, f* en fonction de *a, e, c* pour obtenir :

$$A=\begin{pmatrix} a & -a+3e-c & c \\ -a+e+c & e & a+e-c \\ 2e-c & a-e+c & -a+2e \end{pmatrix}$$

$$A=a\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}+e\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les trois matrices $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont magiques de sommes respectives 0, 3, 1 et sont donc génératrices de $\mathfrak{M}$. Elles sont linéairement indépendantes :

$$a\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}+e\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}=0 \Rightarrow a=e=c=0.$$

Bref ont toutes les qualités pour constituer une base magique…

NB : Si l'on souhaite obtenir un carré magique conforme à la tradition, on peut choisir, par exemple, $a=4, e=5, c=2$ pour engendrer :

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

8° EXERCICE

Soit $A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Considérons une combinaison linéaire des colonnes nulle :

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} = 0 .$$

Si les coefficients α_j ne sont pas tous nuls, il en existe un α_k de module maximum.
En extrayant la ligne k de la combinaison linéaire précédente, on obtient :

$$\alpha_1 a_{k,1} + \cdots + \alpha_k a_{k,k} + \cdots + \alpha_n a_{k,n} = 0 \Rightarrow \alpha_k a_{k,k} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \alpha_j a_{k,j}$$

$$\Rightarrow |\alpha_k||a_{k,k}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} |\alpha_j||a_{k,j}| \Rightarrow |a_{k,k}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \frac{|\alpha_j|}{|\alpha_k|}|a_{k,j}| \text{ et comme } |\alpha_k| = \max\left\{|\alpha_j|\right\}$$

$$|a_{k,k}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} |a_{k,j}|$$

Or cette dernière inégalité entre en contradiction avec l'hypothèse : pour tout $i = 1 \cdots n, |a_{i,i}| > \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} |a_{i,j}|$

9° EXERCICE

La vérification est immédiate sachant que : $f(G) = \{f(x) \,/\, x \in G\}$ et $f^{-1}(H) = \{x \in E \,/\, f(x) \in H\}$. Rappelons que cette dernière notation (certes un peu abusive mais usuelle) ne préjuge pas de l'existence d'une réciproque pour *f*.

10° EXERCICE

Dans le sens *A* et *B* inversible $\Rightarrow AB$ inversible cela a déjà fait l'objet de la petite question 22.
Dans l'autre sens, en supposant *AB* inversible :
$BX = 0 \Rightarrow ABX = 0 \Rightarrow X = 0$. Donc $Ker(B) = \{0\}$, ce qui, pour une matrice carrée comme *B*, suffit pour entraîner l'inversibilité. *A* peut s'écrire alors : $A = (AB)B^{-1}$ produit de deux matrices inversibles donc inversible.

11° EXERCICE

1° Question

$f^{-1}(A)$ est un sous-espace de E (cf. exercice 9) et la restriction de f à $f^{-1}(A)$ est une application linéaire de $f^{-1}(A)$ dont l'image est A. Par application du théorème du rang à $f_{|f^{-1}(A)}$:

$$Dim\left(f^{-1}(A)\right) = Dim(A) + Dim\left(Ker\left(f_{|f^{-1}(A)}\right)\right).$$

Or $Ker\left(f_{|f^{-1}(A)}\right) \subseteq Ker(f)$. Donc :

$$Dim\left(f^{-1}(A)\right) \leq Dim(A) + Dim\left(Ker(f)\right).$$

2° Question

$Ker(g \circ f) = f^{-1}\left(Ker(g)\right)$. Par application de la 1° question :

$$Dim\left(Ker(g \circ f)\right) \leq Dim(Ker(g)) + Dim\left(Ker(f)\right)$$

La deuxième inégalité résulte alors du théorème du rang :

$$\begin{aligned} Rg(g \circ f) &= Dim(E) - Dim\left(Ker(g \circ f)\right) \\ &\geq Dim(E) - Dim\left(Ker(f)\right) - Dim\left(Ker(g)\right) \\ &\geq Dim(E) - \left(Dim(E) - Rg(f)\right) - \left(Dim(E) - Rg(g)\right) \\ &\geq Rg(f) + Rg(g) - Dim(E) \end{aligned}$$

12° PROBLÈME

1° Question

✓ Linéarité de Φ

$$\begin{aligned} \Phi\left(\alpha P(X) + \beta Q(X)\right) &= \sum_{i=0}^{n}\left(\alpha P(a_i) + \beta Q(a_i)\right) X^i \\ &= \alpha \sum_{i=0}^{n} P(a_i) X^i + \beta \sum_{i=0}^{n} Q(a_i) X^i \\ &= \alpha \Phi\left(P(X)\right) + \beta \Phi\left(Q(X)\right) \end{aligned}$$

✓ $Ker(\Phi)$

$$\Phi\left(P(X)\right) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} P(a_i) X^i = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \{0, \cdots, n\} : P(a_i) = 0.$$

Or un polynôme de degré n au plus qui possède $n+1$ racines distinctes est nécessairement nul.

$\Phi\left(P(X)\right) = 0 \Leftrightarrow P = 0$.

$Ker(\Phi) = \{0\}$ et Φ est un isomorphisme de $K_n[X]$.

2° Question

$\Phi(1) = 1 + X + \cdots + X^n$

$\Phi(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$

$\vdots$

$\Phi(X^j) = a_0^j + a_1^j X + \cdots + a_n^j X^n$

Donc :

$$M(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^j & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & & a_1^j & & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_i & & a_i^j & & a_i^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^j & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

NB : ce type de matrice est connue sous le nom de matrice de Vandermonde. Il en sera question au chapitre II.

3° Question

Par définition de L_k : $\Phi(L_k) = X^k$.

Par définition de Φ : $\Phi(L_k) = \sum_{i=0}^{n} L_k(a_i) X^i$.

Il en résulte : $\begin{cases} L_k(a_i) = 0 \text{ si } i \neq k \\ L_k(a_k) = 1 \end{cases}$

L_k a donc n racines distinctes : $\{a_0, \cdots, a_n\} - \{a_k\}$. Comme il s'agit d'un polynôme non nul de degré n au plus, il se factorise :

$L_k(X) = C \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (X - a_i)$ où C est une constante non nul.

Pour déterminer C, il suffit d'utiliser : $L_k(a_k) = 1$:

$$L_k(a_k) = 1 \Leftrightarrow C \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (a_k - a_i) = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{\underbrace{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (a_k - a_i)}_{c_k}}$$

D'où finalement :

$$L_k(X) = \frac{1}{\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(a_k - a_i)} \prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(X - a_i)$$

4° Question

$$\Phi\left(P(X)\right) = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)X^i = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$$

$$\Leftrightarrow P(X) = \Phi^{-1}\left(\sum_{i=0}^{n} b_i X^i\right) \Leftrightarrow P(X) = \sum_{i=0}^{n} b_i \Phi^{-1}(X^i)$$

$$\Leftrightarrow P(X) = \sum_{i=0}^{n} b_i L_i(X)$$

5° Question

Sous l'hypothèse : $a_k - a_i = (k-i)r$. D'où :

$$c_k = \prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(a_k - a_i) = \prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(k-i)r = r^n \prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(k-i)$$

$$c_k = r^n \underbrace{k(k-1)\cdots(1)}_{=k!}\underbrace{(-1)\cdots(k-n)}_{=(-1)^{n-k}(n-k)!} = (-1)^{n-k} r^n k!(n-k)! = \frac{(-1)^{n-k} r^n n!}{C_n^k}$$

6° Question

$X^{n+1} - 1 = (X-1)(X-\omega)\cdots(X-\omega^n)$.

En dérivant :

$$(n+1)X^n = \sum_{j=0}^{n}(X-1)\cdots\cancel{(X-\omega^j)}\cdots(X-\omega^n)$$

Par la substitution $X = \omega^k$:

$$(n+1)\omega^{nk} = \sum_{j=0}^{n}(\omega^k - 1)\cdots\cancel{(\omega^k - \omega^j)}\cdots(\omega^k - \omega^n)$$

$$= (\omega^k - 1)\cdots\cancel{(\omega^k - \omega^k)}\cdots(\omega^k - \omega^n)$$

Or ce dernier terme n'est autre que c_k .

Donc $c_k = (n+1)\omega^{nk}$.

13° EXERCICE

1° Question

Les matrices antisymétriques sont caractérisées par : $M^t = -M$. A partir de là, la vérification qu'elles forment un sous-espace vectoriel est immédiate et cela quelque soit la taille des matrices.
Une base, disons « canonique » de $\mathcal{A}_3$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Plus généralement, une base de $\mathcal{A}_n$ est : $\left(A_{l,k}\right)_{1\le l<k\le n}$ où $A_{l,k}$ est la matrice antisymétrique définie par : $A_{l,k} = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le i\le n}}$ avec $\begin{cases} a_{l,k} = 1 \\ a_{k,l} = -1 \\ a_{i,j} = 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$

2° Question

$M^t = -M \Rightarrow \left(M^t\right)^2 = M^2 \Rightarrow \left(M^2\right)^t = M^2$. Donc M^2 est symétrique.

$\left(M^3\right)^t = \left(M^2 M\right)^t = M^t \left(M^2\right)^t = -MM^2 = -M^3$. Donc M^3 est antisymétrique.
NB : là encore cette propriété persiste quelque soit la taille des matrices.

3° Question

$Ker(M) = Vec\left(\begin{pmatrix} \gamma \\ -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}\right) \neq \{0\}$ car $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Le rang de M est donc 2.

Ce qui permet d'écrire que, en supposant $\alpha \neq 0$:

$$Im(M) = Vec\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha \\ -\beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ -\gamma \end{pmatrix}\right)$$

4° Question

La matrice symétrique $M^2 = \begin{pmatrix} \gamma^2 - 1 & -\beta\gamma & \alpha\gamma \\ & \beta^2 - 1 & -\alpha\beta \\ & & \alpha^2 - 1 \end{pmatrix}$

et $M^3 = -M = M^t$.

5° Question

$$(M+\lambda I)\left((1+\lambda^2)I-\lambda M+M^2\right)$$

$$=(1+\lambda^2)M-\lambda M^2+\underbrace{M^3}_{=-M}+\lambda(1+\lambda^2)I-\lambda^2 M+\lambda M^2$$

$$=\lambda(1+\lambda^2)I$$

Si $\lambda \neq 0$, $M+\lambda I$ est inversible et :

$$(M+\lambda I)^{-1}=\frac{1}{\lambda(1+\lambda^2)}\left((1+\lambda^2)I-\lambda M+M^2\right)$$

$$=\frac{1}{\lambda}I-\frac{1}{1+\lambda^2}M+\frac{1}{\lambda(1+\lambda^2)}M^2$$

14° EXERCICE

1° Question

La matrice nulle n'appartient pas à *G* qui ne saurait donc être un sous-espace.

2° Question

$M_{(\alpha,\beta)}\times M_{(\alpha',\beta')}=M_{(\alpha+\alpha',\beta+\beta')}$

Par suite $M_{(\alpha,\beta)}\times M_{(-\alpha,-\beta)}=M_{(0,0)}=I$. $M_{(\alpha,\beta)}$ est donc inversible et $\left(M_{(\alpha,\beta)}\right)^{-1}=M_{(-\alpha,-\beta)}$.

G stable par multiplication et par inversion est donc un sous-groupe de $GL_3(\mathbb{R})$.

Comme $M_{(\alpha,\beta)}\times M_{(\alpha',\beta')}=M_{(\alpha+\alpha',\beta+\beta')}$ et $M_{(\alpha',\beta')}\times M_{(\alpha,\beta)}=M_{(\alpha'+\alpha,\beta'+\beta)}$, $M_{(\alpha,\beta)}\times M_{(\alpha',\beta')}=M_{(\alpha',\beta')}\times M_{(\alpha,\beta)}$ *G* est abélien (commutatif).

Tout se résume en disant que : $(\alpha,\beta)\mapsto M_{(\alpha,\beta)}$ est un morphisme injectif du groupe $(\mathbb{R}^2,+)$ dans $GL_3(\mathbb{R})$ dont l'image est *G*.

15° EXERCICE

1° Question

$$M^2=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}=M+2I.$$

Donc $\frac{1}{2}(M-I)M=I$. *M* est inversible et : $M^{-1}=\frac{1}{2}(M-I)$

2° Question

✓ Vrai au rang 1 (et même au rang 0).

✓ Si la formule est vraie au rang k :

$$M^{k+1}=MM^{k}=\frac{1}{3}\left(2^{k}-(-1)^{k}\right)M^{2}+\frac{1}{3}\left(2^{k}+2(-1)^{k}\right)M .$$

Comme $M^{2}=M+2I$, il vient :

$$\begin{aligned}M^{k+1}&=\frac{1}{3}\left(2^{k}-(-1)^{k}\right)(M+2I)+\frac{1}{3}\left(2^{k}+2(-1)^{k}\right)M\\&=\frac{1}{3}\left(2^{k}-(-1)^{k}+2^{k}+2(-1)^{k}\right)M+\frac{2}{3}\left(2^{k}-(-1)^{k}\right)I\\&=\frac{1}{3}\left(2^{k+1}+(-1)^{k}\right)M+\frac{1}{3}\left(2^{k+1}-2(-1)^{k}\right)I\\&=\frac{1}{3}\left(2^{k+1}-(-1)^{k+1}\right)M+\frac{1}{3}\left(2^{k+1}+2(-1)^{k+1}\right)I\end{aligned}$$

où l'on reconnaît la formule au rang $k+1$.

3° Question

En dimension *n* :

$M^{2}=(n-2)M+(n-1)I$ D'où : $M^{-1}=\dfrac{1}{n-1}\left(M-(n-2)I\right)$.

Et la récurrence pour démontrer :

$$M^{k}=\frac{1}{n}\left((n-1)^{k}-(-1)^{k}\right)M+\frac{1}{n}\left((n-1)^{k}+(n-1)(-1)^{k}\right)I$$

se calque sur le cas précédent.

Remarque :

Un autre éclairage peut être apporté à cet exercice en remarquant que

$$M=UU^{t}-I \text{ où } U=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n} .$$

$$\begin{aligned}M^{2}=(UU^{t}-I)^{2}=U\underbrace{U^{t}U}_{=n}U^{t}-2UU^{t}+I&=(n-2)UU^{t}+I\\&=(n-2)(M+I)+I\\&=(n-2)M+(n-1)I\end{aligned}$$

L'usage de l'identité remarquable ou, plus généralement comme il va suivre, de la formule du binôme est justifié par le fait que *I* et UU^{t} commutent.

$$M^{k}=(UU^{t}-I)^{k}=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}C_{k}^{i}(UU^{t})^{i} .$$

Or $(UU^t)^i = U\underbrace{U^tU}_{=n}U^t \cdots U\underbrace{U^tU}_{=n}U^t = n^{i-1}UU^t$ pour $i \geq 1$ tandis que $(UU^t)^0 = I$.

$$M^k = (-1)^k I + \left(\sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} C_k^i n^{i-1}\right) UU^t .$$

Or :

$$n\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i} C_k^i n^{i-1} = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i} C_k^i n^i = -(-1)^k + \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i} C_k^i n^i = -1 + (n-1)^k$$

$$\sum_{i=1}^{k}(-1)^i C_k^i n^{i-1} = \frac{1}{n}\left((n-1)^k - (-1)^k\right)$$

Et finalement :

$$M^k = (-1)^k I + \frac{1}{n}\left((n-1)^k - (-1)^k\right)UU^t$$

En remplaçant UU^t par $M + I$, il vient :

$$M^k = (-1)^k I + \frac{1}{n}\left((n-1)^k - (-1)^k\right)(M + I)$$

$$= \frac{1}{n}\left((n-1)^k - (-1)^k\right) + \frac{1}{n}\left(n(-1)^k + (n-1)^k - (-1)^k\right)I$$

$$= \frac{1}{n}\left((n-1)^k - (-1)^k\right) + \frac{1}{n}\left((n-1)^k - (n-1)(-1)^k\right)I$$

Soit exactement la formule proposée à la démonstration par récurrence.

16° EXERCICE

1° Question

Vérification immédiate.

2° Question

Soit $A = \left(a_{i,\,j}\right)_{\substack{i=1\cdots n\\ j=1\cdots n}}$, $B = \left(b_{i,\,j}\right)_{\substack{i=1\cdots n\\ j=1\cdots n}} \in \mathcal{M}_n(K)$. Le terme situé ligne *i*, colonne *j* de AB est :

$$A_{i,\bullet}B_{\bullet,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

Si $A, B \in \mathcal{T}_n(K)$ alors : $i > j \Rightarrow a_{i,j} = b_{i,j} = 0$ et

$$A_{i,\bullet}B_{\bullet,j} = \sum_{\substack{k=1\\ k\geq i\\ k\leq j}}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

Donc si $i > j$, il n'existe pas de *k* entre *i* et *j* et $A_{i,\bullet}B_{\bullet,j} = 0$, ce qui implique l'appartenance de AB à $\mathcal{T}_n(K)$.
De plus, si $i = j$, cette formule montre que $A_{i,\bullet}B_{\bullet,i} = a_{i,i}b_{i,i}$. En d'autres termes, les éléments de la diagonale de AB sont le produit des éléments correspondants des diagonales de *A* et *B*.

3° Question

A inversible $\Leftrightarrow$ Les colonnes de *A* sont linéairement indépendantes.
Or selon le deuxième exercice, ceci équivaut à : $\forall i = 1 \cdots n : a_{i,i} \neq 0$.

Pour déterminer alors A^{-1}, on peut transcrire $AX = Y$ par le système linéaire :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{1,n}x_n = y_1 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = y_{n-1} \\ \qquad\qquad a_{n,n}x_n = y_n \end{cases}$$

Les $a_{i,i}$ étant non nuls, on obtient : $x_n = \dfrac{1}{a_{n,n}} y_n$, puis en remontant on exprime x_i, pour $i = n-1, n-2, \cdots, 1$ comme combinaison linéaire de $y_i, y_{i+1}, \cdots, y_n$. Au final on obtient un système :

$$\begin{cases} x_1 = b_{1,1}y_1 + b_{2,2}y_2 + \cdots\cdots\cdots + b_{1,n}y_n \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_{n-1} = b_{n-1,n-1}x_{n-1} + b_{n-1,n}x_n \\ x_n = b_{n,n}y_n \end{cases}$$

système qui équivaut à $X = BY$ où la matrice *B* manifestement triangulaire supérieure est l'inverse de *A*.
Dans ce cas $AB = I$ et selon la remarque faite à la première question $a_{i,i}b_{i,i} = 1$ Donc la matrice $A^{-1} = B$ aligne sur sa diagonale les inverses des termes de la diagonale de *A*.

Remarque : bien entendu , les matrices triangulaires inférieures jouissent des mêmes propriétés. Une simple transposition suffit pour s'en convaincre.

CHAPITRE I

PETITES QUESTIONS POUR FAIRE LE POINT

1 Le deuxième terme du produit est $C+AB$ et non $C+BA$.

2 Celle que l'on obtient en premier par simple recopie en colonnes des coordonnées des nouveaux vecteurs de base est $P_{b,b'}$. L'autre s'obtient par inversion : $P_{b',b}=\left(P_{b,b'}\right)^{-1}$.

3. La relation de similitude ne concernant que les matrices carrées, *A* et *B* sont hors jeu.
$Tr(C)\neq Tr(D)$. Or deux matrices semblables ont même trace (proposition I.12) ce qui disqualifie *C* et *D*.

4. $A'=P^{-1}AP \Rightarrow A'^n=P^{-1}A^nP$ pour $n\in\mathbb{N}$.
Si A est inversible : $A'^{-1}=P^{-1}A^{-1}P$.

5. Le premier oui :

$$Tr\left(ABCA^{-1}\right)=Tr\left(A(BCA^{-1})\right)=\underbrace{Tr\left((BCA^{-1})A\right)}_{\text{par commutation sous trace}}=Tr\left(BC\right).$$

Le second non.

6. $G+F=F$. Mais, si $G\neq\{0\}$ $G\oplus F$ n'est pas définie puisque $G\cap F=G$.

7. Si $F\oplus G=\mathbb{R}^3$, alors (corollaire I.24) $Dim(F)+Dim(G)=3$. Donc un des sous-espaces *F* ou *G* est de dimension 1, l'autre de dimension 2. Autrement dit (u,v) libre et $Rg(u',v')=1$ (où l'inverse).

8. Oui $G\cap F=\{0\}$ donc la somme est directe. De plus $Dim(F)=2, Dim(G)=1$, donc, par inclusion conjugué à l'égalité des dimensions $F\oplus G=\mathbb{R}^3$.

Pour le deuxième exemple $\{0\}\subset G\subset F$ et la somme n'est pas directe.

9.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a & 2b+a^2 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A^2 matrice de projection si et seulement si $A^2 = A$ (corollaire I.31). Ce qui équivaut à $a^2 = -b$.
Dans ce cas la matrice de la projection sur $Ker(f)$ selon $Im(f)$ est (proposition I.35) :

$$I - A = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

10. $\frac{1}{2}\left(f+f^2\right)\frac{1}{2}\left(f+f^2\right) = \frac{1}{4}\left(f^2 + 2\underbrace{f^3}_{=f} + \underbrace{f^4}_{=f^2}\right) = \frac{1}{2}\left(f+f^2\right).$

11. Non. Le théorème du rang dit simplement que :

$$Dim(Im(f)) + Dim((Ker(f)) = Dim(E)$$

ce qui permet de conclure à $E = Im(f) \oplus Ker(f)$ si la somme est directe, ce qui n'est en rien garantie sauf à vérifier que $Im(f) \cap Ker(f) = \{0\}$.

12.
On peut simplement prouver : $(F \cap G) + (F \cap H) \subseteq F \cap (G+H)$:

$$x \in (F \cap G) + (F \cap H) \Rightarrow x = \underbrace{u}_{\in F \cap G} + \underbrace{v}_{\in F \cap H} \Rightarrow \begin{cases} x \in F \\ x \in G+H \end{cases}$$

Avec les sommes directes, remarquons que si la somme de G et H est directe, alors $G \cap H = \{0\}$, donc $(F \cap G) \cap (F \cap H) = \{0\}$ et la somme de $F \cap G$ et $F \cap H$ est aussi directe.
Ceci dit, on démontre de la même façon : $(F \cap G) \oplus (F \cap H) \subseteq F \cap (G \oplus H)$
Mais la réciproque est fausse.
Exemple : dans $\mathbb{R}^3$ avec (u,v,w) libre, $G = Vec(u)$, $H = Vec(v)$, $F = Vec(u+v)$, Alors $(F \cap G) \oplus (F \cap H) = \{0\}$ et $F \cap (G \oplus H) = Vec(u+v)$.

13. Oui si elles commutent :

$(p_2 p_1)^2 = p_2 p_1 p_2 p_1 = p_2 p_1 p_1 p_2 = p_2 p_1 p_2 = p_2 p_2 p_1 = p_2 p_1$.
Sinon…

14. Soit Φ la forme correspondante :

Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\Phi(X) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -x + 2y + 3z$

Les vecteurs (par exemple) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ forment une base de $Ker(\Phi)$.

1° EXERCICE

1° Question

$$\alpha u' + \beta v' + \gamma w' = 0 \Leftrightarrow \alpha(u - v + w) + \beta(v + w) + \gamma(-u + 2v - w) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

$\boldsymbol{b'} = (u', v', w')$ base de E.

$$P_{\boldsymbol{b},\boldsymbol{b'}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad P_{\boldsymbol{b'},\boldsymbol{b}} = \left(P_{\boldsymbol{b},\boldsymbol{b'}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$X_{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow X_{\boldsymbol{b'}} = P_{\boldsymbol{b'},\underbrace{\boldsymbol{b}\, X_{\boldsymbol{b}}}} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

$$Y_{\boldsymbol{b'}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow Y_{\boldsymbol{b}} = P_{\boldsymbol{b},\underbrace{\boldsymbol{b'}\, Y_{\boldsymbol{b'}}}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées de u dans la base $\boldsymbol{b'}$ peuvent se lire sur la première colonne de $P_{\boldsymbol{b'},\boldsymbol{b}}$.

2° Question

$$M_{\boldsymbol{b'}}(f) = P_{\boldsymbol{b'},\boldsymbol{b}} M_{\boldsymbol{b}}(f) P_{\boldsymbol{b},\boldsymbol{b'}} = \begin{pmatrix} 6 & -10 & -10 \\ -6 & 3 & 8 \\ 6 & -6 & -9 \end{pmatrix}.$$

La matrice $M_{\boldsymbol{b}}(f)$ est symétrique, la « nouvelle » matrice $M_{\boldsymbol{b'}}(f)$ ne l'est pas. Moralité : la symétrie ne se conserve pas par similitude.

2° EXERCICE

Dans la base $\boldsymbol{b'}$ la matrice de cette projection p est :

$$M_{\boldsymbol{b'}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M_{\boldsymbol{b}}(p) = P_{\boldsymbol{b},\boldsymbol{b'}} M_{\boldsymbol{b'}}(p) P_{\boldsymbol{b'},\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dans la base $\boldsymbol{b'}$ la matrice de cette symétrie s est :

$$M_{\boldsymbol{b'}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } M_{\boldsymbol{b}}(s) = P_{\boldsymbol{b},\boldsymbol{b'}} M_{\boldsymbol{b'}}(s) P_{\boldsymbol{b'},\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -6 & -3 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

3° EXERCICE

$M_{b'}(f) = \left(b_{i,j}\right)_{\substack{i=1\cdots n \\ j=1\cdots n}}$ avec $b_{i,j} = a_{n+1-i,n+1-j}$.

Pour obtenir ce résultat, il est conseillé d'utiliser le fait que $M_{b'}(f)$ a ses colonnes constituées par les coordonnées de $f(u_n), f(u_{n-1}),\cdots f(u_1)$ dans la base $(u_n, u_{n-1}, \cdots, u_1)$ plutôt que de recourir à la formule matricielle : $M_{b'}(f) = P_{b',b} M_b(f) P_{b,b'}$.

4° EXERCICE

En considérant A comme la matrice d'un endomorphisme f d'un espace de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ dans une base $\boldsymbol{b} = (u, v, w)$, il vient :

$f(u) = u - v - 2w$

$f(v) = 2u + v - w$

$f(w) = -u + 2v + w$

En choisissant comme nouvelle base $\boldsymbol{b'} = (w, v, u)$

$$\begin{array}{l} f(w) = w + 2v - u \\ f(v) = -w + v + 2u \\ f(u) = 2w - v + u \end{array} \text{ et } M_{b'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A^t .$$

Remarque : cette propriété, vérifiée ici par un bricolage, s'avère en fait vraie pour toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, mais pour en avoir confirmation, vous devrez patienter jusqu'au chapitre VI.

5° EXERCICE

Il est évident que les homothéties de rapport α (scalaire) $h = \alpha.Id$ ont même matrice dans toutes les bases. Et la réciproque ?

Soit f un endomorphisme de matrice :

$$M_b(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{j,1} & \cdots & a_{j,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \text{ dans la base } \boldsymbol{b} = (u_{1,} \cdots, u_j, \cdots u_n) .$$

Sa matrice dans la base $\boldsymbol{b'} = (u_{1,} \cdots, -u_j, \cdots u_n)$ est alors :

$$M_{b'}(f)=\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & -a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -a_{j,1} & \cdots & a_{j,j} & \cdots & -a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & -a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Seuls sont affectés les termes de la ligne *j* et de la colonne *j* qui changent de signe à l'exception de celui de la diagonale qui reste imperturbable.
Si donc *f* a la propriété souhaitée : $M_{b'}(f)=M_b(f)$, ce qui implique :

$a_{j,i}=-a_{j,i}$ pour $i=1\cdots n \quad i\neq j$

$a_{i,j}=-a_{i,j}$ pour $i=1\cdots n \quad i\neq j$

Et, comme on n'est pas en caractéristique 2, on en conclut à la nullité de tous les termes situés colonne *j* et ligne *j* hormis celui de la diagonale.
Comme ceci est vrai pour tout *j*, la matrice de *f* est nécessairement diagonale.
Un dernier effort : il suffit alors de permuter les vecteurs de base, ce qui doit la laisser invariante pour conclure que tous les termes de la diagonale sont égaux à un certain scalaire α et par suite $f=\alpha.Id$.

6° EXERCICE

$L_{i,j,\alpha}$ modifie la ligne *j* en se servant de la ligne *i*.

$L_{k,l,\beta}$ modifie la ligne *l* en se servant de la ligne *k*.

Si aucune de ces deux opérations n'utilise une ligne modifiée par l'autre, l'ordre dans lequel on les effectue est sans importance.
Après application des deux opérations à une matrice *A* :

La ligne *j* de *A* sera transformée : $A_{j,\bullet}\to A_{j,\bullet}+\alpha A_{i,\bullet}$

La ligne *l* de *A* sera transformée : $A_{l,\bullet}\to A_{l,\bullet}+\beta A_{k,\bullet}$

Les autres lignes restant inchangées.

Autrement dit si $j\neq k$ et $i\neq l$, elles commutent.

Par contre si $j=k$ ou $i=l$, il n'en est rien. Si, par exemple, $j=k$ et $i\neq l$:
En appliquant $L_{i,j,\alpha}$ suivie de $L_{j,l,\beta}$:

$A_{j,\bullet}\to A_{j,\bullet}+\alpha A_{i,\bullet}$ puis $A_{l,\bullet}\to A_{l,\bullet}+\beta(A_{j,\bullet}+\alpha A_{i,\bullet})$

En appliquant $L_{j,l,\beta}$ suivie de $L_{i,j,\alpha}$:

$A_{l,\bullet}\to A_{l,\bullet}+\beta A_{j,\bullet}$ puis $A_{j,\bullet}\to A_{j,\bullet}+\alpha A_{i,\bullet}$

Et les résultats diffèrent pour la ligne *l*.

Petite illustration avec Maple :

```
> Id:=diag(1,1,1,1);
```

$$Id := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cas $j \neq k$ et $i \neq l$:

```
> addrow(Id,1,2,alpha):addrow(%,3,4,beta);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 1 \end{bmatrix}$$

```
> addrow(Id,3,4,beta):addrow(%,1,2,alpha);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 1 \end{bmatrix}$$

Cas $j = k$ et $i \neq l$

```
> addrow(Id,1,2,alpha):addrow(%,2,4,beta);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\,\alpha & \beta & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> addrow(Id,2,4,beta):addrow(%,1,2,alpha);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7° EXERCICE

$$+L_1\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \quad \times -1\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$-L_2\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} -6L_3 \\ +3L_3 \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 6 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour les autres, nous donnerons simplement le résultat :

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -i & 0\\ -1 & i & 1\\ i & 1+i & -i\end{pmatrix}\qquad C^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -a & a^2 & -a^3\\ 0 & 1 & -a & a^2\\ 0 & 0 & 1 & -a\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

8° EXERCICE

$$\begin{array}{c}\\ -L_1\\ +L_1\end{array}\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 0 & 4\\ -1 & 4 & 2 & 2\end{pmatrix}\to\begin{array}{c}\\ -L_1\\ +L_1\end{array}\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 3 & -3 & 3\\ 0 & 3 & 5 & 3\end{pmatrix}\to\begin{array}{c}\\ \\ -L_2\end{array}\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 3 & -3 & 3\\ 0 & 0 & 8 & 0\end{pmatrix}$$

Selon la proposition I.17 le rang est 3.

9° EXERCICE

Voici cette procédure modifiée :

```
> inverseGJ:=proc(A::matrix)
local n,p,i,k::integer,B,ID::matrix;
n:=rowdim(A);p:=coldim(A);
if n<>p then ERROR("matrice non carrée") fi;
B:=copy(A);
B:=augment(B,diag(seq(i->1,i=1..n)));
# on travail sur une copie de A pour ne pas modifier la matrice  initiale
for i from 1 to n  do
# on recherche un pivot sur la colonne i
   k:=i;
   while  k<=n  and B[k,i]=0 do k:=k+1 od;
   if k<=n then # pivot trouvé
      if k>i then B:=swaprow(B,i,k) fi;
      B:=pivot(B,i,i); B:=mulrow(B,i,1/B[i,i]);
      else
   ERROR("matrice non inversible");
   fi;
od;
RETURN(submatrix(B,1..n,n+1..2*n));
end;
```

La modification consiste à définir $B=(A \mid I_n)$ et faire opérer les opérations élémentaires sur cette matrice conformément à la procédure « manuelle ». A la fin des boucles, si la matrice est inversible, $B=(I_n \mid A^{-1})$. La procédure retourne alors le deuxième « morceau » de la matrice comme résultat.

10° EXERCICE

Soit F' un supplémentaire de $F\cap G$ dans F : $F=F'\oplus(F\cap G)$.

Soit G' un supplémentaire de $F\cap G$ dans G : $G=G'\oplus(F\cap G)$

Alors, F' , $F \cap G$, G' sont

1) indépendants :

$\underbrace{u}_{\in F'} + \underbrace{v}_{\in F\cap G} + \underbrace{w}_{\in G'} = 0 \Rightarrow \underbrace{u}_{\in F'} = \underbrace{-(v+w)}_{\in G}$. Or F' et G n'ont en commun que le vecteur nul. Donc $u=0$ et $v+w=0$. Comme, v et w appartiennent à des sous-espaces supplémentaires : $v=w=0$.

2) de somme directe égale à $F+G$

D'où :

$Dim(F+G) = Dim\left(F' \oplus (F \cap G) \oplus G'\right) = Dim(F') + Dim(F \cap G) + Dim(G')$

Comme :

$Dim(F) = Dim(F') + Dim(F \cap G)$ et $Dim(G) = Dim(G') + Dim(F \cap G)$,

il en résulte :

$$Dim(F+G) = Dim(F) + Dim(G) - Dim(F \cap G)$$

Autre voie :

Si l'on considère la somme directe «externe » $F \times G$ (voir proposition I.25), on a $Dim(F \times G) = Dim(F) + Dim(G)$

Soit alors l'application linéaire :

$$\begin{aligned} F \times G &\xrightarrow{\Phi} E \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned}$$

Alors $Ker(\Phi) = \left\{(x,-x) \,/\, x \in F \cap G\right\}$ est isomorphe à $F \cap G$.

$Im(\Phi) = F+G$.

La formule résulte alors du théorème du rang.

11° EXERCICE

Le fait que E_0 et E_1 soient des sous-espaces est à ranger dans la catégorie « vérification immédiate ».

Pour tout $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on peut écrire, pour tout réel x :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right) + \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right)$$

ce qui montre que f se décompose en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Autrement dit : $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = E_0 + E_1$.

La seule fonction réelle qui soit paire et impaire est la fonction nulle. Donc $E_0 \cap E_1 = \{0\}$ et la somme est directe.

12° EXERCICE

1° Question

Si $x=0$, c'est évident.

Sinon, la proposition I.27 assure que la droite vectorielle $Vec(x)$ a un supplémentaire et qu'il existe une projection p de E sur $Vec(x)$. Par hypothèse, cette projection commute avec h : $h(p(x)) = p(h(x))$. Mais $x \in Vec(x)$ et $p(x) = x$. Donc $h(x) = p(h(x))$ ce qui prouve que $h(x) \in V(x)$.

2° Question

Si un des vecteurs x ou y est nul, le résultat va de soit puisque $h(0) = \lambda 0$ pour n'importe quel scalaire λ. Sinon :

1° cas : (x, y) liée

On peut supposer $y = kx$. D'où :

$h(y) = kh(x) \Rightarrow \mu y = k\lambda x \Rightarrow \mu y = \lambda y \Rightarrow \lambda = \mu$

2° cas (x, y) libre

$h(x + y) = \lambda x + \mu y$. Mais $h(x + y)$ est lui même colinéaire à $x + y$. D'où :

$v(x + y) = \lambda x + \mu y$ pour un scalaire ν.

Il vient alors :

$(\lambda - \nu)x + (\mu - \nu)y = 0$

ce qui par liberté de (x, y) implique $\lambda = \mu = \nu$.

Donc, il existe un scalaire λ tel que pour tout $x : h(x) = \lambda x$. h est donc une homothétie de rapport λ : $h = \lambda Id$.

13° EXERCICE

1° Question

Réflexivité :

$\forall x \in E : x \,\Re\, x \quad \Leftrightarrow \quad 0 \in F$

Symétrie :

$\forall x, y \in E : x \,\Re\, y \Leftrightarrow y \,\Re\, x \quad \Leftrightarrow \quad \forall x, y \in E : x - y \in F \Leftrightarrow y - x \in F$

Transitivité :

$\forall x, y, z \in E : x \,\Re\, y$ et $y \,\Re\, z \Rightarrow x \,\Re\, z \quad \Leftrightarrow$

$\forall x, y, z \in E : x - y \in F$ et $y - z \in F \Rightarrow x - z \in F$

Les trois propriétés résultent de la définition même d'un sous-espace vectoriel.

2° Question

$\forall x, y, x', y' \in E : x \,\Re\, x'$ et $y \,\Re\, y' \Rightarrow x - x' \in F$ et $y - y' \in F$

$\Rightarrow x + y - (x' + y') \in F \Rightarrow (x + y) \,\Re\, (x' + y')$

$\forall x, x' \in E, \alpha \in K : x \,\Re\, x' \Rightarrow x - x' \in F \Rightarrow \alpha x - \alpha x' \in F \Rightarrow \alpha x \,\Re\, \alpha x'$

3° Question

La compatibilité de $\Re$ avec + et . assure l'indépendance avec le choix du représentant des classes :

Pour + :

Si $\overline{x'}=\overline{x}$ et $\overline{y'}=\overline{y}$, alors $x\,\mathfrak{R}\,x'$ et $y\,\mathfrak{R}\,y'$ et, d'après la 2° question, $(x+y)\,\mathfrak{R}\,(x'+y')$. Autrement dit : $\overline{x+y}=\overline{x'+y'}$.

Pour . :

Si $\overline{x'}=\overline{x}$ et, alors $x\,\mathfrak{R}\,x'$ et, d'après la 2° question, $\alpha x\,\mathfrak{R}\,\alpha x'$. Autrement dit : $\overline{\alpha x}=\overline{\alpha x'}$.

L'addition et la multiplication scalaire étant bien définie sur E/F, il reste à vérifier les propriétés d'espace vectoriel de $(E/F,+,.)$ lesquelles se déduisent sans peine des propriétés correspondantes de E.

4° Question

Linéarité de s :

$\forall x,y\in E,\alpha,\beta\in K : s(\alpha x+\beta y)=\overline{\alpha x+\beta y}=\alpha\overline{x}+\beta\overline{y}$.

Noyau de s :

$Ker(s)=\left\{x\in E\ /\ \overline{x}=\overline{0}\right\}=F$.

Existence de f' :

Soit $\overline{x}\in E/F$, en définissant $f'\left(\overline{x}\right)$ par $f'\left(\overline{x}\right)=f(x)$, on s'assure de l'indépendance de cette définition avec le choix d'un représentant de la classe : si $\overline{x'}=\overline{x}$, alors $x-x'\in F$ et comme $F\subseteq Ker(f)$, $f(x-x')=0$ et donc $f(x)=f(x')$.

On a alors, pour tout x de E : $f'\circ s(x)=f'(\overline{x})=f(x)$. Autrement dit $f=f'\circ s$.

Unicité de f' :

S'il existe f'' tel que $f''\circ s=f=f'\circ s$, alors, pour tout x de E : $f''(\overline{x})=f'(\overline{x})$ donc $f''=f'$.

5° Question

Cette application est la restriction de s à F' : $s_{|F'}$

Surjectivité :

Soit $\overline{x}\in E/F$, alors $x=\underbrace{x_0}_{\in F}+\underbrace{x_1}_{\in F'}$ et $\overline{x}=\underbrace{\overline{x_0}}_{=0}+\overline{x_1}=\overline{x_1}$. Il existe donc un antécédent à $\overline{x}$ pour $s_{|F'}$.

Injectivité :

$s_{|F'}(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x\in F'\\ \overline{x}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in F'\\ x\in F\end{cases}\Leftrightarrow x=0$ puisque F et F' supplémentaires.

$Ker\left(s_{|F'}\right)=\{0\}$.

Donc $F' \simeq E/F$.

Autre voie :
Si l'on applique la question précédente en prenant pour *f* la projection *p* de *E* sur F' (pris comme espace d'arrivée) selon *F*, *p* vérifie manifestement la condition $F \subseteq Ker(p)$, ce qui permet de conclure à l'existence de $p'\ E/F \to F'$ vérifiant $p = p' \circ s$. *p* étant surjective, p' aussi.
Pour $\overline{x} \in E/F$, $p'(\overline{x}) = 0 \Rightarrow p'(s(x) = 0 \Rightarrow p(x) = 0 \Rightarrow x \in F \Rightarrow \overline{x} = 0$. Donc $Ker(p') = \{0\}$ et p' est injective.
p' est donc un isomorphisme de $E/F \xrightarrow{\simeq} F'$ (réciproque de $s_{|F'}$).

6° Question
Si *E* est de dimension finie, l'isomorphisme précédent montre que $Dim(F') = Dim(E/F)$. Comme $Dim(E) = Dim(F) + Dim(F')$:

$$Dim(E/F) = Dim(E) - Dim(F)$$

14° PROBLÈME

1° Question
Petite remarquable initiale : $Ker(f^0) = Ker(Id) = \{0\}$.

a) $f^i(x) = 0 \Rightarrow f^{i+1}(x) = 0$. Donc $Ker(f^i) \subseteq Ker(f^{i+1})$.

b) S'il existe un rang *i* pour lequel : $Ker(f^i) = Ker(f^{i+1})$. Alors :

$$x \in Ker(f^{i+2}) \Rightarrow f^{i+1}(f(x)) = 0$$
$$\Rightarrow f(x) \in Ker(f^{i+1}) \Rightarrow f(x) \in Ker(f^i)$$
$$\Rightarrow f^i(f(x)) = 0 \Rightarrow x \in Ker(f^{i+1})$$

Donc, en tenant compte de a) : $Ker(f^{i+1}) = Ker(f^{i+2})$.

c) Comme $Ker(f^i) \subseteq E$, la suite des noyaux ne saurait être strictement croissante puisque *E* est de dimension finie *n*. Il va donc exister un premier rang *k* pour lequel $Ker(f^k) = Ker(f^{k+1})$. Et d'après b), cette égalité va perdurer pour les rangs suivants. La suite va être strictement croissante jusqu'à ce rang *k*, stationnaire ensuite :

$$\{0\} \subset \cdots \subset Ker(f^i) \subset \cdots \subset Ker(f^k) = Ker(f^{k+1}) = \cdots \subseteq E$$

2° Question
Petite remarquable initiale : $Im(f^0) = Im(Id) = E$

a) $y = f^{i+1}(x) \Rightarrow y = f^i(f(x))$ Donc : $Im(f^i) \supseteq Im(f^{i+1})$.

De là, l'usage du théorème du rang :

$$\text{pour tout } i \in \mathbb{N},\ Dim\big(Im(f^i)\big) + Dim\big(Ker(f^i)\big) = n,$$

permet de conclure directement que la suite des images est strictement décroissante jusqu'à ce rang *k* (le même que pour les noyaux) et stationnaire ensuite :

$$E \supset \cdots \supset Im(f^i) \cdots \supset Im(f^k) = Im(f^{k+1}) = \cdots \supseteq \{0\}$$

3° Question

$Ker(f^k) \cap Im(f^k) = \{0\}$. En voici la preuve :

$$x \in Ker(f^k) \cap Im(f^k) \Rightarrow \begin{cases} f^k(x) = 0 \\ x = f^k(y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f^k(x) = 0 \\ f^{2k}(y) = 0 \end{cases}$$

comme $Ker(f^{2k}) = Ker(f^k)$

$$\Rightarrow \begin{cases} f^k(x) = 0 \\ \underbrace{f^k(y)}_{=x} = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0$$

Donc la somme de $Ker(f^k)$ et $Im(f^k)$ est directe. Comme de plus :

$$Dim\big(Im(f^k) \oplus Ker(f^k)\big) = Dim\big(Im(f^k)\big) + Dim\big(Ker(f^k)\big) = n,$$

il en résulte que $Im(f^k) \oplus Ker(f^k) = E$.

4° Question

$Ker(f^k)$ stable pour f :

$x \in Ker(f^k) \Rightarrow f^k(x) = 0 \Rightarrow f^{k+1}(x) = 0 \Rightarrow f^k(f(x)) = 0 \Rightarrow f(x) \in Ker(f^k)$.

Donc :

$$\begin{array}{ccc} Ker(f^k) & \xrightarrow{f_0} & Ker(f^k) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

est bien un endomorphisme de $Ker(f^k)$.

Pour tout $x \in Ker(f^k)$, $f_0^k(x) = f^k(x) = 0$. Donc f_0 nilpotente.

$Im(f^k)$ stable pour f :

$y \in Im(f^k) \Rightarrow y = f^k(x) \Rightarrow f(y) = f^{k+1}(x) \Rightarrow f(y) \in Im(f^{k+1}) = Im(f^k)$.

Donc :

$$\begin{array}{ccc} Im(f^k) & \xrightarrow{f_1} & Im(f^k) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

est bien un endomorphisme de $Im(f^k)$.

$Ker(f_1)=\{0\}$:

$$f_1(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x\in Im(f^k) \\ f(x)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in Im(f^k) \\ x\in Ker(f^k) \end{cases} \Rightarrow x=0 .$$

Donc f_1 est un isomorphisme de $Im(f^k)$.

$f = f_0 \oplus f_1$:

Comme $Ker(f^k)\oplus Im(f^k)=E$, tout x de E se décompose de manière unique : $x=\underbrace{x_0}_{\in Ker(f^k)}+\underbrace{x_1}_{\in Im(f^k)}$ et :

$$f(x)=\underbrace{f(x_0)}_{\in Ker(f^k)}+\underbrace{f(x_1)}_{\in Im(f^k)}=f_0(x_0)+f_1(x_1).$$

C'est la définition même d'une somme directe d'application linéaire (I.40). Donc $f = f_0 \oplus f_1$.

15° EXERCICE

Forme φ_1

Linéarité :

$$\varphi_1(\alpha P+\beta Q)=(\alpha P+\beta Q)(a)=\alpha P(a)+\beta Q(a)=\alpha\varphi_1(P)+\beta\varphi_1(Q)$$

Noyau de φ_1 :

$$Ker(\varphi_1)=\{P\in \mathbb{R}_n[X] \ / \ P(a)=0\}=\{P\in \mathbb{R}_n[X] \ / \ P(X)=(X-a)Q(X)\}.$$

Matrice de φ_1 dans la base canonique :

$$M(\varphi_1)=\begin{pmatrix}1 & a & \cdots & a^n\end{pmatrix}$$

Forme φ_2

Linéarité :

$$\varphi_2(\alpha P+\beta Q)=D(\alpha P+\beta Q)(a)=(\alpha DP+\beta DQ)(a)$$
$$=\alpha DP(a)+\beta DQ(a)=\alpha\varphi_2(P)+\beta\varphi_2(Q)$$

Noyau de φ_2 :

$$Ker(\varphi_2)=\{P\in \mathbb{R}_n[X] \ / \ DP(a)=0\}.$$

Matrice de φ_2 dans la base canonique :

$$M(\varphi_2)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2a & \cdots & na^{n-1}\end{pmatrix}$$

Forme φ_3

Linéarité :

$\varphi_3(\alpha P+\beta Q)=\int_0^1(\alpha P(t)+\beta Q(t))dt=$

$\alpha\int_0^1 P(t)dt+\beta\int_0^1 Q(t))dt=\alpha\varphi_3(P)+\beta\varphi_3(Q)$

Noyau de φ_3 :

$Ker(\varphi_3)=\left\{P\in\mathbb{R}_n[X]\ /\ \int_0^1 P(t)dt=0\right\}$.

Matrice de φ_3 dans la base canonique :

$M(\varphi_3)=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1}\end{pmatrix}$

CHAPITE II

PETITES QUESTIONS POUR FAIRE LE POINT

1.
$Det(AB) = Det(A)Det(B)$ (corollaire II.24).
$Det(A+B) = ???$
$Det(\alpha A) = \alpha^p Det(A)$, p taille de A (proposition II.12).
$Det(A^n) = Det(A)^n, n \in \mathbb{N}$ (corollaire II.24)
$Det(A^{-1}) = Det(A)^{-1}$, si A est inversible (corollaire II.24).

2. Dans l'ordre : 0, 2, -10, 0, 0.

3. Si on écarte le cas trivial $p = Id$, une projection n'est pas un isomorphisme, donc son déterminant est nul (proposition II.27).
Pour une symétrie $s^2 = Id$ (proposition I.33). Donc $\left(Det(s)\right)^2 = 1$.

4. La proposition II.22 assure que deux matrices semblables ont le même déterminant. La réciproque est fausse : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ont même déterminant, mais n'ayant pas même trace, ne sauraient être semblables. La suite du cours, montrera qu'avoir même trace et même déterminant n'est pas une condition suffisante de similitude.

5. On passe du premier au deuxième par échange des lignes 2 et 3. Donc (corollaire 24 et proposition 15) ils sont de valeurs opposées.

6. Une première réponse est ± 1. Pour être plus précis, si $n = 2k$ ou $n = 2k+1$, k échanges de colonnes permettent de passer de la matrice donnée à I_n. Donc le déterminant est égal à $(-1)^k$.

7. Non : elles ont même trace 6, mais des déterminants différents 6 et 4.

8. $A^3 = I \Rightarrow \left(Det(A)\right)^3 = 1$. Donc sur $\mathbb{R}$, $Det(A) = 1$.
Et sur $\mathbb{C}$ $Det(A) \in \left\{ 1, e^{\frac{2\pi}{3}i}, e^{-\frac{2\pi}{3}i} \right\}$

1°EXERCICE

En ajoutant les lignes $2,\cdots,n$ à la ligne 1, on obtient :

$$Det(M_n)=\begin{pmatrix} na+b & na+b & \cdots & na+b \\ a & a+b & & a \\ \vdots & & \ddots & \\ a & \cdots & & a+b \end{pmatrix}=(na+b)\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a+b & & a \\ \vdots & & \ddots & \\ a & \cdots & & a+b \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ -aL_1 \\ \vdots \\ -aL_1 \end{matrix}$$

Et en effectuant les opérations sur les lignes indiquées :

$$Det(M_n)=(na+b)\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & b & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & b \end{pmatrix}=(na+b)b^{n-1}$$

2° EXERCICE

La matrice A, manifestement symétrique, s'explicite :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & & & a^{n-1} \\ a & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & a \\ a^{n-1} & & & a & 1 \end{pmatrix}$$

La multiplication par la matrice diagonale D, revient à multiplier chaque colonne j de A par a^{j-1}. Le terme situé ligne i, colonne j de AD est donc :

$$\left(AD\right)_{i,j}=a^{|i-j|}a^{j-1}$$

et la ligne i de AD :

$$\left(AD\right)_{i,\bullet}=\left(a^{|i-1|} \quad \cdots \quad a^{|i-j|}a^{j-1} \quad a^{|i-j-1|}a^{j} \quad \cdots \quad a^{|i-n|}a^{n-1}\right)$$

D'où le terme situé ligne i, colonne j de ADJ :

pour $j\neq n$

$$\left(ADJ\right)_{i,j}=\left(AD\right)_{i,\bullet}J_{\bullet,j}=a^{|i-j|}a^{j-1}-a^{|i-j-1|}a^{j}=\begin{cases} a^{i-j}a^{j-1}-a^{i-j-1}a^{j-1}=0 \text{ si } i>j \\ a^{j-1}-a^{j+1}=a^{j-1}(1-a^2) \text{ si } i=j \\ \cdots \text{ si } i<j \end{cases}$$

pour $j=n$

$$\left(ADJ\right)_{n,n}=\left(AD\right)_{n,\bullet}J_{\bullet,n}=a^{n-1}$$

La matrice ADJ est donc triangulaire supérieure :

$$ADJ = \begin{pmatrix} 1-a^2 & * & \cdots & * \\ 0 & (1-a^2)a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$Det(ADJ) = (1-a^2)^{n-1} a^{1+2+\cdots+(n-1)} = (1-a^2)^{n-1} a^{\frac{n(n-1)}{2}} = Det(A)Det(D)Det(J)$$

Et comme $Det(D) = a^{\frac{n(n-1)}{2}}$ et $Det(J) = 1$:

$$Det(A) = (1-a^2)^{n-1}$$

3° EXERCICE

Une vérification aisée montre que (u, v, w) libre et engendrent un hyperplan d'équation (application proposition III.25) :

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 1 & 0 \\ y & -1 & 0 & 1 \\ z & 3 & 1 & -1 \\ t & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} - t\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$-x + y + z = 0$$

4° EXERCICE

1° Question

$D_1 = a + b$

$D_2 = a^2 + ab + b^2$

$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$ pour $n > 2$

2° Question

- ✓ La formule est vérifiée au rangs $n = 1$ <u>et</u> $n = 2$
- ✓ Si on la suppose vraie pour les rangs $n-1$ <u>et</u> $n-2$:

  $D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$

  Et par application de l'hypothèse de récurrence :

$$
\begin{aligned}
D_n &= (a+b)\frac{1}{a-b}(a^n-b^n) - ab\frac{1}{a-b}(a^{n-1}-b^{n-1}) \\
&= \frac{1}{a-b}\Big((a+b)(a^n-b^n) - ab(a^{n-1}-b^{n-1})\Big) \\
&= \frac{1}{a-b}(a^{n+1}-b^{n+1})
\end{aligned}
$$

3° Question

- ✓ La formule est vérifiée au rangs $n=1$ <u>et</u> $n=2$
- ✓ Si on la suppose vraie pour les rangs $n-1$ <u>et</u> $n-2$:

  $D_n = 2aD_{n-1} - a^2 D_{n-2}$

  Et par application de l'hypothèse de récurrence :

$$
\begin{aligned}
D_n &= 2ana^{n-1} - a^2(n-1)a^{n-2} \\
&= a^n(2n-n+1) \\
&= (1+n)a^n
\end{aligned}
$$

Remarque :

La formule : $D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$ établit une récurrence linéaire pour la suite (D_n). Ce type de suite fera l'objet d'une étude générale au chapitre IV.

5° EXERCICE

$$
Det(A_n) = \begin{vmatrix}
C_1^0 & C_2^1 & \cdots & C_j^{j-1} & \cdots & C_n^{n-1} \\
C_2^0 & C_3^1 & \cdots & C_{j+1}^{j-1} & \cdots & C_{n+1}^{n-1} \\
\vdots & \vdots & & & & \vdots \\
C_i^0 & C_{i+1}^1 & \cdots & C_{i+j-1}^{j-1} & \cdots & C_{i+n-1}^{j-1} \\
\vdots & \vdots & & & & \vdots \\
C_n^0 & C_{n+1}^1 & \cdots & C_{n+j-1}^{j-1} & \cdots & C_{2n-1}^{n-1}
\end{vmatrix}
\begin{array}{l}
\\ -L_1 \\ \vdots \\ -L_{i-1} \\ \vdots \\ -L_{n-1}
\end{array}
$$

En effectuant successivement les opérations élémentaire indiquées en commençant par celle qui affecte la ligne n, puis la ligne $n-1$ etc… on obtient, en usant de la relation $C_k^p - C_{k-1}^p = C_{k-1}^{p-1}$:

$$Det(A_n)=\begin{vmatrix} C_1^0 & C_2^1 & \cdots & C_j^{j-1} & \cdots & C_n^{n-1} \\ 0 & C_2^0 & \cdots & C_j^{j-2} & \cdots & C_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & C_i^0 & \cdots & C_{i+j-2}^{j-2} & \cdots & C_{i+n-2}^{j-2} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & C_n^0 & \cdots & C_{n+j-2}^{j-2} & \cdots & C_{2n-2}^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$Det(A_n)=\begin{vmatrix} C_2^0 & \cdots & C_j^{j-2} & \cdots & C_n^{n-2} \\ \vdots & & & & \vdots \\ C_i^0 & \cdots & C_{i+j-2}^{j-2} & \cdots & C_{i+n-2}^{j-2} \\ \vdots & & & & \vdots \\ C_n^0 & \cdots & C_{n+j-2}^{j-2} & \cdots & C_{2n-2}^{n-2} \end{vmatrix}$$

Avec la notation de la définition II.19 : $Det(A_n)=Det\left(\widehat{(A_n)_{1,n}}\right)$.

Il reste à itérer le procédé pour obtenir : $Det(A_n)=\left|C_n^0\right|=1$.

6° EXERCICE

Dans $\mathbb{C}_{n-1}[X]$, de dimension *n*, la liste $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est liée. Donc il existe des scalaires α_i non tous nuls tels que : $\sum_{i=0}^{n}\alpha_i P_i(X)=0$.

Donc pour tout $j=0\cdots n$: $\sum_{i=0}^{n}\alpha_i P_i(x_j)=0$. Autrement dit :

$$\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\begin{pmatrix} P_i(x_0) \\ \vdots \\ P_i(x_n)\end{pmatrix}=0$$

Les scalaires α_i étant non tous nuls, les colonnes sont donc liées ce qui amène à conclure à la nullité du déterminant.

7° EXERCICE

$(P_0,\cdots P_{j-1})$ est une liste échelonnée de $\mathbb{C}_{j-1}[X]$ donc une base $\mathbb{C}_{j-1}[X]$ (exercice 0.1). Pour $j>0$, $P_j(X)-X^j$ est de degré $j-1$ et est donc combinaison linéaire de $P_0,\cdots P_{j-1}$:

$$P_j(X)-X^j=\sum_{i=1}^{j-1}\alpha_i P_i(X)\Leftrightarrow P_j(X)=X^j+\sum_{i=1}^{j-1}\alpha_i P_i(X).$$

En appliquant ce résultat pour $j=n-1$:

$$\begin{vmatrix} 1 & P_1(x_1) & \cdots & P_{n-1}(x_1) \\ 1 & P_1(x_2) & \cdots & P_{n-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & P_1(x_n) & \cdots & P_{n-1}(x_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & P_1(x_1) & \cdots & P_{n-2}(x_1) & x_1^{n-1}+\sum_{i=1}^{n-2}\alpha_i P_i(x_1) \\ 1 & P_1(x_2) & \cdots & P_{n-2}(x_2) & x_2^{n-1}+\sum_{i=1}^{n-2}\alpha_i P_i(x_2) \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & P_1(x_n) & \cdots & P_{n-2}(x_n) & x_n^{n-1}+\sum_{i=1}^{n-2}\alpha_i P_i(x_n) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & P_1(x_1) & \cdots & P_{n-1}(x_1) & x_1^{n-1} \\ 1 & P_1(x_2) & \cdots & P_{n-1}(x_2) & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & P_1(x_n) & \cdots & P_{n-1}(x_n) & x_n^{n-1} \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & P_1(x_1) & \cdots & P_{n-2}(x_1) & \sum_{i=1}^{n-2}\alpha_i P_i(x_1) \\ 1 & P_1(x_2) & \cdots & P_{n-2}(x_2) & \sum_{i=1}^{n-2}\alpha_i P_i(x_2) \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & P_1(x_n) & \cdots & P_{n-2}(x_n) & \sum_{i=1}^{n-2}\alpha_i P_i(x_n) \end{vmatrix}}_{\substack{=0 \\ \text{car la dernière colonne est combinaison linéaire des autres}}}$$

Il suffit ensuite d'itérer le procédé pour $j=n-2,\cdots,2$ pour obtenir :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Ce déterminant est le déterminant de Vandermonde rencontré dans un entracte du cours : $V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$

8° EXERCICE

Les f_i étant dérivables sur I : $f_i(t+h)=f_i(t)+hf_i'(t)+h\varepsilon(h)$.

$$D(t+h)=Det\left(f_1(t+h),\cdots,f_n(t+h)\right)$$
$$=Det\left(f_1(t)+hf_1'(t)+h\varepsilon(h),\cdots,f_n(t)+hf_n'(t)+h\varepsilon(h)\right)$$

Par multinéarité de Det :

$$Det\left(f_1(t+h),\cdots,f_n(t+h)\right)=Det\left(f_1(t),\cdots,f_n(t)\right)$$
$$+h\sum_{i=1}^{n}Det\left(f_1(t),\cdots,f_i'(t),\cdots,f_n(t)\right)$$
$$+h\,\underbrace{\left(\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\right)}_{\text{tous ces termes tendent vers 0 avec } h}$$

On a donc :

$$D(t+h)=D(t)+h\sum_{i=1}^{n}Det\left(f_1(t),\cdots,f_i'(t),\cdots,f_n(t)\right)+h\varepsilon(h)$$

avec $\underset{h\to 0}{Lim}(\varepsilon(h))=0$

Ce qui prouve la dérivabilité de D en t et assure que :

$$D'(t)=\sum_{i=1}^{n}Det\left(f_1(t),\cdots,f_i'(t),\cdots,f_n(t)\right)$$

9° EXERCICE

1° Question

Si $Rg(A)=n$, A est inversible, $Det(A)\neq 0$ et $\tilde{A}A=A\tilde{A}=Det(A)I$ (proposition II.31). $\tilde{A}$ est aussi inversible et de rang *n*.

Si $Rg(A)<n-1$, alors tous les déterminants de taille $n-1$ extraits, de *A* sont nuls (proposition II.26). Donc tous les cofacteurs sont nuls et $\tilde{A}$=0.

Si $Rg(A)=n-1$, $Det(A)=0$, $A\tilde{A}=0\Rightarrow Im(\tilde{A})\subseteq Ker(A)$. La dimension de $Ker(A)$ étant alors de 1, le rang de $\tilde{A}$ est 0 ou 1. Or un déterminant de taille $n-1$, extrait de *A*, donc un cofacteur, est non nul. Ce qui exclut $Rg(A)=0$.

2° Question

Si $Rg(A)=n$, A est inversible, $Det(A)\neq 0$ et $\tilde{A}A=Det(A)I$ (proposition II.31). Donc $Det(\tilde{A})Det(A)=Det(A)Det(I)\Rightarrow Det(\tilde{A})=1$.

Si $Rg(A)<n$, la 1° question montre que $Rg(\tilde{A})<n$, donc $Det(\tilde{A})=0$.

10° EXERCICE

En posant $A=\left(a_{i,j}\right)_{\substack{i=1\cdots n\\ j=1\cdots n}}$

$$Det(A+\alpha UU^t)=\begin{vmatrix} a_{1,1}+\alpha & \cdots & a_{1,n}+\alpha \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}+\alpha & \cdots & a_{n,n}+\alpha \end{vmatrix}$$

Par multinéarité :

$$Det(A+\alpha UU^t)=\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$+\alpha\begin{vmatrix} 1 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}+\cdots\alpha\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1,n} & \cdots & a_{n,n-1} & 1 \end{vmatrix}$$

$$+\underbrace{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}_{\text{tous ces termes contenant 2 fois la colonne } U \text{ sont nuls}}$$

$$\text{Or } \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & j & \\ & \downarrow & \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{1,1} & 1 & a_{1,n} \\ \vdots & 1 & \vdots \\ a_{n,1} & 1 & a_{n,n} \end{vmatrix} \end{array}=\sum_{i=1}^{n} Cof(A)_{i,j}$$

Donc $Det(A+\alpha UU^t)=Det(A)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} Cof(A)_{i,j}$

11° EXERCICE

1° Question

$$\Omega=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \cdots & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \cdots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$

Ω est symétrique et $Det(\Omega)$ est un déterminant de Vandermonde rencontré dans un entracte du cours : $Det(\Omega)=V_n(1,\omega,\cdots,\omega^{n-1})=\prod_{0\le k<j\le n-1}(\omega^j-\omega^k)$.

2° Question

Le terme situé ligne *k*, colonne *j* de $\Omega\bar{\Omega}$ est :

$$(\Omega\bar{\Omega})_{k,j}=\sum_{l=1}^{n}\omega^{(k-1)(l-1)}\overline{\omega^{(l-1)(j-1)}}=\sum_{l=1}^{n}\omega^{(k-1)(l-1)}\bar{\omega}^{(l-1)(j-1)}$$

Comme $\bar{\omega}=\omega^{-1}$:

$$(\Omega\bar{\Omega})_{k,j} = \sum_{l=1}^{n} \omega^{(k-1)(l-1)} \omega^{-(l-1)(j-1)} = \sum_{l=1}^{n} \omega^{(l-1)(k-j)}$$

$$= 1 + \omega^{(k-j)} + \cdots + (\omega^{(k-j)})^{(l-1)} + \cdots + (\omega^{(k-j)})^{n-1}$$

$$= \begin{cases} n \text{ si } k = j \\ \dfrac{1-(\omega^{(k-j)})^n}{1-\omega^{(k-j)}} = \dfrac{1-(\omega^n)^{(k-j)}}{1-\omega^{(k-j)}} = 0 \text{ si } k \neq j \end{cases}$$

D'où : $\Omega\bar{\Omega} = nI_n$

(ce qui montre au passage que $\Omega^{-1} = \dfrac{1}{n}\bar{\Omega}$).

Et $\Omega\bar{\Omega} = nI_n \Rightarrow Det(\Omega)Det(\bar{\Omega}) = Det(nI_n) \Rightarrow Det(\Omega)Det(\bar{\Omega}) = n^n$.

Or, le calcul d'un déterminant d'une matrice s'effectuant comme somme et produit de ses coefficient, opérations toutes deux compatibles avec la conjugaison : $Det(\bar{\Omega}) = \overline{Det(\Omega)}$.

Et finalement $|Det(\Omega)|^2 = n^n$.

12° EXERCICE

1° Question

Si $A = LU$, $a_{i,j} = \sum_{m=1}^{n} l_{i,m} u_{m,j}$.

Pour $i, j \leq k \leq n$, on a :

- ✓ $a_{i,j}$ terme de A_k
- ✓ $l_{i,m} = u_{m,j} = 0$ pour $m > k$ puisque L triangulaire inférieure et U triangulaire supérieure. Donc $a_{i,j} = \sum_{m=1}^{k} l_{i,m} u_{m,j}$

Il en résulte que : $A_k = L_k U_k$. Le paragraphe du cours dédié à la décomposition LU précise :

- ✓ L est une matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur sa diagonale. Donc L_k aussi et $Det(L_k) = 1$.
- ✓ LU est une matrice triangulaire supérieure avec des termes non nuls sur sa diagonale. Donc U_k aussi et $Det(U_k) \neq 0$.

Donc $Det(A_k) = Det(U_k) \neq 0$.

2° Question

Soit $\mathcal{H}_n$:

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$, si $Det(A_k) \neq 0$ pour $i = 1 \cdots n$, alors il existe un produit L' d’opérations élémentaires de type II tel que :

$$L'A = \begin{pmatrix} p_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & p_n \end{pmatrix} \text{ avec } p_i \neq 0 \text{ pour } i = 1 \cdots n.$$

✓ $\mathcal{H}_1$ est manifestement vrai.

✓ $\mathcal{H}_{n-1} \Rightarrow \mathcal{H}_n$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & * \\ & A_{n-1} & & \vdots \\ & & & * \\ \hline a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{array}\right) \text{ avec } Det(A_k) \neq 0 \text{ pour } i = 1 \cdots n,$$

alors, selon $\mathcal{H}_{n-1}$, il existe un produit L' d’opérations élémentaires de type II tel que :

$$L'A_{n-1} = \begin{pmatrix} p_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & p_{n-1} \end{pmatrix} \text{ avec } p_i \neq 0 \text{ pour } i = 1 \cdots n-1.$$

L' n’affectant pas la ligne n de A :

$$L'A = \left(\begin{array}{ccc|c} p_1 & * & * & * \\ 0 & \ddots & * & \vdots \\ 0 & 0 & p_{n-1} & * \\ \hline a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{array}\right)$$

Comme $p_i \neq 0$ pour $i = 1 \cdots n-1$, on peut appliquer à $L'A$ le produit d’opérations élémentaires de type II :

$$\prod_{i=1}^{n-1} L_{i,n,-a_{n,i}/p_i}$$

(la notation est celle de la définition I.14)

ce qui donne :

$$\prod_{i=1}^{n-1} L_{i,n,-a_{n,i}/p_i} L'A = \left(\begin{array}{ccc|c} p_1 & * & * & * \\ 0 & \ddots & * & \vdots \\ 0 & 0 & p_{n-1} & * \\ \hline 0 & \cdots & 0 & b_{n,n} \end{array}\right)$$

Si l'on peut prouver que $b_{n,n} \neq 0$, $\mathcal{H}_n$ est démontrée…

Or le déterminant d'une opération élémentaire de type II ou plus exactement de la matrice qui le représente est égal à 1. Donc :

$$Det\left(\prod_{i=1}^{n-1} L_{i,n,-a_{n,i}/p_i} L'A\right) = Det(A)$$

Quant à la matrice triangulaire de droite, son déterminant est : $p_1 p_2 \cdots p_{n-1} b_{n,n}$.

Donc : $Det(A) = p_1 p_2 \cdots p_{n-1} b_{n,n}$.

Or selon l'hypothèse initiale sur A : $Det(A) = Det(A_n) \neq 0$. Ce qui assure $b_{n,n} \neq 0$ et donc $\mathcal{H}_n$.

CHAPITRE III

PETITES QUESTIONS POUR FAIRE LE POINT

1. Linéarité sur la première composante :

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha P+\beta P',Q)&=(\alpha P(0)+\beta P'(0))Q(0)\\&=\alpha P(0)Q(0)+\beta P'(0)Q(0)\\&=\alpha\Phi(P,Q)+\beta\Phi(P',Q)\end{aligned}$$

Φ est manifestement symétrique, ce qui dispense de vérifier la linéarité sur la deuxième composante.

Pour le deuxième exemple, non symétrique, la bilinéarité doit être vérifiée sur les deux composantes. Il suffit d'adapter la démonstration précédente.

2. Dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$M(\Phi)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&-2\\1&-2&0\end{pmatrix}$$

Comme exemple de vecteur isotrope, on peut citer : $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

3. Si x, y sont isotropes pour la forme bilinéaire symétrique Φ :

$$\Phi(x+y,x+y)=\underbrace{\Phi(x,x)}_{=0}+\underbrace{\Phi(y,y)}_{=0}+2\Phi(x,y)$$

Par conséquent, $x+y$ est isotrope si et seulement si $\Phi(x,y)=0$, autrement dit si et seulement si x, y sont Φ-orthogonaux.

4. Elle est diagonale (proposition III.15)

5.

$\Phi\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=x^2+y^2$. Le vecteur $\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$, par exemple, est isotrope.

6.

$$\begin{aligned}\langle x+y\,;x-y\rangle&=\langle x\,;x\rangle+\langle y\,;-y\rangle+\langle x\,;-y\rangle+\langle y\,;x\rangle\\&=\|x\|^2-\|y\|^2\end{aligned}$$

Donc :

$(x+y)\perp(x-y)\Leftrightarrow\|x\|=\|y\|$.

Résultat qui s'énonce en géométrie élémentaire : un parallélogramme a ses diagonales orthogonales si et seulement si c'est un losange.

7.

$$\forall y\in E:\langle x\,;y\rangle=\langle y\,;x'\rangle\Leftrightarrow\forall y\in E:\langle x\,;y\rangle-\langle x'\,;y\rangle=0$$

$$\Leftrightarrow\forall y\in E:\langle x-x'\,;y\rangle=0\Leftrightarrow x-x'\in E^{\perp}$$

Or un produit scalaire étant une forme définie est non dégénérée (proposition III.9) et (définition III.4) : $E^{\perp}=\{0\}$. Finalement, on en déduit : $x=x'$.

8.

D'après l'inégalité triangulaire : $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$. Cette inégalité résulte de celle de Cauchy-Schwarz (théorème III.17). Pour que $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$, il est donc nécessaire que l'égalité soit vérifiée dans Cauchy-Schwarz. autrement dit que *x*, *y* soient colinéaires. Mais pour avoir une condition nécessaire et suffisante il reste à préciser : *x*, *y* soient colinéaires et de même sens.

Pour : $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$, la réponse est fournie par Pythagore : $x\perp y$.

9. Uniquement si *F* est un sous-espace (proposition III.10). Si *F* n'est pas un sous-espace, $(F^{\perp})^{\perp}$ est lui un sous-espace (proposition III.8) et l'égalité $F=(F^{\perp})^{\perp}$ ne saurait avoir lieu.

10.

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\text{ et }\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-x+y+z=0\\x-2y+z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x+y+z=0\\-y+2z=0\end{cases}$$

Donc, par exemple, $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ répond à la question.

11.

$f^2(x)=f\left(\langle x\,;u\rangle u\right)=\langle x\,;u\rangle f(u)=\langle x\,;u\rangle\underbrace{\langle u\,;u\rangle}_{=1}u=f(x)$. Donc $f^2=f$

$Ker(f)=\{x\ /\ \langle x\,;u\rangle=0\}=Vec(u)^{\perp}\quad Im(f)=Vec(u)$.

En résumé, *f* est la projection orthogonale sur $Vec(u)$.

12.

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

13. Elles sont toutes deux orthogonales (et en plus symétrique pour la première) donc $M^{-1} = M^t$.

14.

$\langle X\,;Y\rangle = (1+i)\overline{i} + (1-i)1 + (-1)\overline{(1-i)} = -i+1+1-i-1-i = 1-3i$

$\langle Y\,;X\rangle = \overline{\langle X\,;Y\rangle} = 1+3i$

$\|X\|_2 = \sqrt{2+2+1} = \sqrt{5} \quad \|Y\|_2 = \sqrt{1+1+2} = 2$

15. Non : elle possède un terme non réel sur sa diagonale (cf remarque suite aux définitions III.44).

16. Non,, dans un espace hermitien :

$$\begin{aligned}\langle x+y\,;x-y\rangle &= \langle x\,;x\rangle - \langle y\,;y\rangle - \langle x\,;y\rangle + \langle y\,;x\rangle \\ &= \|x\|^2 - \|y\|^2 + \langle y\,;x\rangle - \overline{\langle y\,;x\rangle} \\ &= \|x\|^2 - \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Im}(\langle y\,;x\rangle)\end{aligned}$$

18.

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2i & 1 & 2 \\ 2 & 2i & i \\ 1 & -2i & 2i \end{pmatrix}$$

19. Oui : Soit $A = \left(a_{k,j}\right)_{\substack{k=1\cdots n \\ j=1\cdots n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

A hermitienne et antisymétrique $\Leftrightarrow \forall k, j = 1\cdots n : a_{k,j} = -a_{j,k} = \overline{a_{j,k}}$

Or ces conditions sont équivalentes à :

- ✓ les termes de A ont une partie réelle nulle,
- ✓ $\forall k, j = 1\cdots n : a_{k,j} = -a_{j,k}$,
- ✓ Les termes de la diagonale sont nuls.

Exemple : $\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ est hermitienne et antisymétrique.

1° EXERCICE

1° Question

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ sont des vecteurs isotropes.

2° Question

La matrice de Q dans la base canonique est : $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ de rang 3. Autrement dit Q est non dégénérée.

3° Question

Soit Φ la forme bilinéaire associée à Q :

$$\Phi(u_1,u_2)=(1\quad 1\quad 0)\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=0\Rightarrow u_1\perp u_2\,.$$

$$\Phi(u_1,u_3)=(1\quad 1\quad 0)\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=0\Rightarrow u_1\perp u_3$$

$$\Phi(u_2,u_3)=(1\quad -1\quad 0)\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=0\Rightarrow u_2\perp u_3$$

Donc $\boldsymbol{b}=(u_1,u_2,u_3)$ base Φ-orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

Dans cette base, $M_{\boldsymbol{b}}(\Phi)$ est diagonale comme le prévoit la proposition III.15 :

$$M_{\boldsymbol{b}}(\Phi)=\begin{pmatrix}Q(u_1)&0&0\\0&Q(u_2)&0\\0&0&Q(u_3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

2°EXERCICE

1° Question

Vérification immédiate…

2° Question

$$\Phi(P,P)=\sum_{i=0}^{n}P(i)^2\geq 0\,.$$

$\Phi(P,P)=0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} P(i)^2 = 0 \Leftrightarrow \forall i = 0 \cdots n : P(i) = 0$.

Or $P \in \mathbb{R}_n[X]$ ne peut posséder $n+1$ racines distinctes sans être nul. Donc $\Phi(P,P)=0 \Leftrightarrow P=0$.

Φ est définie positive donc est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

3° Question

En se remémorant du problème 0.12 :

$$L_i(X) = \frac{1}{\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}(i-k)} \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}(X-k) = \frac{X(X-1)\cdots\cancel{(X-i)}\cdots(X-n)}{i(i-1)\cdots\cancel{(i-i)}\cdots(i-n)}$$

répond aux exigences.

Pour $i, j \in \{0, \cdots, n\}$:

$$\langle L_i \,;\, L_j \rangle = \sum_{k=0}^{n} L_i(k) L_j(k) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ L_i(i)^2 = 1 \text{ si } i = j \end{cases}$$

Donc $(L_0, \cdots, L_n)$ base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.

4° Question

Oui, la démonstration effectuée à la 2° question :

$$\Phi(P,P)=0 \Leftrightarrow P=0$$

fondée sur le nombre maximum de racine d'un polynôme non nul reste valide dans $\mathbb{C}_n[X]$.

En revanche, $\Phi(P,P) \geq 0$ ne tient plus.

3° EXERCICE

1° Question

Selon la propriété de f :

$$\langle f(e_i)\,;\, f(e_j)\rangle = \langle e_i \,;\, e_j \rangle = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$$

ce qui, selon la proposition III.29, montre que $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ base orthonormale de E.

2° Question

Pour $x, y \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $i = 1 \cdots n$, par bilinéarité du produit scalaire :

$$\langle f(\alpha x + \beta y) - \alpha f(x) - \beta f(y) \,;\, f(e_i) \rangle =$$
$$\langle f(\alpha x + \beta y) \,;\, f(e_i)\rangle - \alpha \langle f(x)\,;\, f(e_i)\rangle - \beta\langle f(y)\,;\, f(e_i)\rangle$$

Comme *f* conserve le produit scalaire :
$=\langle \alpha x+\beta y\,;e_i\rangle-\alpha\langle x\,;e_i\rangle-\beta\langle y\,;e_i\rangle=0$
Donc $f(\alpha x+\beta y)-\alpha f(x)-\beta f(y)$ est orthogonal à tous les $f(e_i)$ lesquels forment une base de *E*.
Donc $f(\alpha x+\beta y)-\alpha f(x)-\beta f(y)\in E^{\perp}=\{0\}$. Et :

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y).$$

ce qui assure la linéarité de *f*.
De plus f transforme la base $(e_1,\cdots,e_n)$ en une base $(f(e_1),\cdots,f(e_n))$ et est donc un isomorphisme de *E*.

4° EXERCICE

Les deux matrices citées vérifient : $M^{t}M=I$ et sont bien orthogonales.
Réciproquement :

$$M=\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix} \text{ orthogonal } \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=1\\ c^2+d^2=1\\ ac+bd=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a^2c^2+b^2c^2=c^2\\ c^2a^2+d^2a^2=a^2\\ a^2c^2=d^2b^2\end{cases} \Rightarrow\begin{cases} b^2d^2+b^2c^2=c^2\\ d^2b^2+d^2a^2=a^2\\ a^2c^2=d^2b^2\end{cases} \Rightarrow\begin{cases} b^2\underbrace{(c^2+d^2)}_{=1}=c^2\\ d^2\underbrace{(b^2+a^2)}_{=1}=a^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} b^2=c^2\\ d^2=a^2\end{cases}$$

Si $a=d$, alors la condition $ac+bd=0$ impose $c=-b$ et :

$$M=\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix} \text{ avec } a^2+b^2=1 \ (Det(M)=1)$$

Si $-a=d$, alors la condition $ac+bd=0$ impose $c=b$ et :

$$M=\begin{pmatrix} a & b\\ b & -a\end{pmatrix} \text{ avec } a^2+b^2=1 \ (Det(M)=-1).$$

Dans les deux cas, la condition $a^2+b^2=1$ permet de poser $a=\cos\theta$ et $b=\sin\theta$.

5° PROBLÈME

En préalable remarquons que $M(x_1,\cdots x_k)$ est la matrice symétrique :

$$M\left(x_1,\cdots x_k\right)=\begin{pmatrix}\left\langle x_1\,;x_1\right\rangle & \cdots & \left\langle x_1\,;x_k\right\rangle\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \left\langle x_k\,;x_1\right\rangle & \cdots & \left\langle x_k\,;x_k\right\rangle\end{pmatrix}$$

1° Question

Si la liste $\left(x_1,\cdots x_k\right)$ est orthonormale, $\left\langle x_i\,;x_j\right\rangle=\begin{cases}1 \text{ si } i=j\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$. Dans ce cas : $M\left(x_1,\cdots x_k\right)=I_k$.

$$G\left(\alpha x_1,\cdots x_k\right)=\begin{vmatrix}\left\langle \alpha x_1\,;\alpha x_1\right\rangle & \cdots & \left\langle \alpha x_1\,;x_k\right\rangle\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \left\langle x_k\,;\alpha x_1\right\rangle & \cdots & \left\langle x_k\,;x_k\right\rangle\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha^2\left\langle x_1\,;x_1\right\rangle & \cdots & \alpha\left\langle x_1\,;x_k\right\rangle\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha\left\langle x_k\,;x_1\right\rangle & \cdots & \left\langle x_k\,;x_k\right\rangle\end{vmatrix}$$

$$=\alpha\begin{vmatrix}\alpha\left\langle x_1\,;x_1\right\rangle & \cdots & \alpha\left\langle x_1\,;x_k\right\rangle\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \left\langle x_k\,;x_1\right\rangle & \cdots & \left\langle x_k\,;x_k\right\rangle\end{vmatrix}=\alpha^2\begin{vmatrix}\left\langle x_1\,;x_1\right\rangle & \cdots & \left\langle x_1\,;x_k\right\rangle\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \left\langle x_k\,;x_1\right\rangle & \cdots & \left\langle x_k\,;x_k\right\rangle\end{vmatrix}$$

$$=\alpha^2 G\left(x_1,\cdots x_k\right)$$

Plus généralement : $G\left(x_1,\cdots,\alpha x_i,\cdots x_k\right)=\alpha^2 G\left(x_1,\cdots,x_i,\cdots x_k\right)$.

2° Question

Notons $M_{\bullet,j}=\begin{pmatrix}\left\langle x_1\,;x_j\right\rangle\\ \vdots\\ \left\langle x_k\,;x_j\right\rangle\end{pmatrix}$ la colonne *j* de la matrice $M\left(x_1,\cdots x_k\right)$.

Une combinaison linéaire des $M_{\bullet,j}$ s'écrit :

$$\sum_{j=1}^{k}\alpha_j M_{\bullet,j}=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\begin{pmatrix}\left\langle x_1\,;x_j\right\rangle\\ \vdots\\ \left\langle x_k\,;x_j\right\rangle\end{pmatrix}=\sum_{j=1}^{k}\begin{pmatrix}\alpha_j\left\langle x_1\,;x_j\right\rangle\\ \vdots\\ \alpha_j\left\langle x_k\,;x_j\right\rangle\end{pmatrix}=\sum_{j=1}^{k}\begin{pmatrix}\left\langle x_1\,;\alpha_j x_j\right\rangle\\ \vdots\\ \left\langle x_k\,;\alpha_j x_j\right\rangle\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\left\langle x_1\,;\sum_{j=1}^{k}\alpha_j x_j\right\rangle\\ \vdots\\ \left\langle x_k\,;\sum_{j=1}^{k}\alpha_j x_j\right\rangle\end{pmatrix}$$

Si la liste $(x_1,\cdots x_k)$ est liée, il existe des α_i non tous nuls tels que $\sum_{j=1}^{k}\alpha_j x_j = 0$. Mais alors $\sum_{j=1}^{k}\alpha_j M_{\bullet,j} = 0$, les colonnes de la matrice $M(x_1,\cdots x_k)$ sont liées.

Réciproquement, si les colonnes de la matrice $M(x_1,\cdots x_k)$ sont liées, il existe des α_i non tous nuls tels que $\sum_{j=1}^{k}\alpha_j M_{\bullet,j} = 0$, ce qui implique :

$$\begin{pmatrix} \left\langle x_1 \,;\, \sum_{j=1}^{k}\alpha_j x_j \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle x_k \,;\, \sum_{j=1}^{k}\alpha_j x_j \right\rangle \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{k}\alpha_j x_j \perp x_1 \\ \quad\vdots \\ \sum_{j=1}^{k}\alpha_j x_j \perp x_k \end{cases}.$$

Mais alors $\sum_{j=1}^{k}\alpha_j x_j$, qui appartient à $Vec(x_1,\cdots x_k)$ par définition, est orthogonal à tous les x_i, donc appartient à $Vec(x_1,\cdots x_k)^{\perp}$.

Comme $Vec(x_1,\cdots x_k)\cap Vec(x_1,\cdots x_k)^{\perp} = \{0\}$, $\sum_{j=1}^{k}\alpha_j x_j = 0$. et la liste $(x_1,\cdots x_k)$ est liée.

Donc : $(M_{\bullet,1},\cdots,M_{\bullet,k})$ liée $\Leftrightarrow (x_1,\cdots x_k)$ liée

Et la dépendance linéaire des colonnes de la matrice $M(x_1,\cdots x_k)$ équivaut à $G(x_1,\cdots x_k) = Det(M(x_1,\cdots x_k)) = 0$.

3° Question

Si la liste $(x_1,\cdots x_k)$ est libre, $Vec(x_1,\cdots x_k)$ est un sous espace de dimension k et possède une base orthonormale $(u_1,\cdots u_k)$ (proposition III.31).

Si on note $X_i \in \mathbb{R}^k$ les coordonnées du vecteur x_i dans cette base :

$$\left\langle x_i \,;\, x_j \right\rangle = X_j^t X_i$$

Et en posant $X = (X_1 \mid \cdots \mid X_k) \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$:

$$X^t X = \left(X_j^t X_i\right)_{\substack{i=1\cdots k\\ j=1\cdots k}} = \left(\left\langle x_i \,;\, x_j \right\rangle\right)_{\substack{i=1\cdots k\\ j=1\cdots k}} = M(x_1,\cdots,x_k)$$

D'où :

$$G\left(x_1,\cdots x_k\right)=Det\left(M\left(x_1,\cdots x_k\right)\right)=Det(X^t X)=Det(X)^2>0$$

résultat qui précise la question précédente.

4° Question

$$G\left(y,x_1,\cdots x_k\right)=\begin{vmatrix}\langle y\,;y\rangle & \langle y\,;x_1\rangle & \cdots & \langle y\,;x_k\rangle\\ \langle x_1\,;y\rangle & \langle x_1\,;x_1\rangle & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ \langle x_k\,;y\rangle & & \cdots & \langle x_k\,;x_k\rangle\end{vmatrix}$$

En utilisant la décomposition : $y=\underbrace{y_1}_{\in F}+\underbrace{y_2}_{\in F^{\perp}}$

$\langle y\,;y\rangle=\|y\|^2=\|y_1\|^2+\|y_2\|^2$ (Pythagore)

$\langle x_k\,;y\rangle=\langle x_k\,;y_1+y_2\rangle=\langle x_k\,;y_1\rangle+\underbrace{\langle x_k\,;y_2\rangle}_{\substack{=0\\ \text{puisque } y_2\in F^{\perp}}}=\langle x_k\,;y_1\rangle$

$$G\left(y,x_1,\cdots x_k\right)=\begin{vmatrix}\|y_1\|^2+\|y_2\|^2 & \langle y_1\,;x_1\rangle & \cdots & \langle y_1\,;x_k\rangle\\ \langle x_1\,;y_1\rangle & \langle x_1\,;x_1\rangle & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ \langle x_k\,;y_1\rangle & & \cdots & \langle x_k\,;x_k\rangle\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\|y_2\|^2 & \langle y_1\,;x_1\rangle & \cdots & \langle y_1\,;x_k\rangle\\ 0 & \langle x_1\,;x_1\rangle & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & & \cdots & \langle x_k\,;x_k\rangle\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\langle y_1\,;y_1\rangle & \langle y_1\,;x_1\rangle & \cdots & \langle y_1\,;x_k\rangle\\ \langle x_1\,;y_1\rangle & \langle x_1\,;x_1\rangle & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ \langle x_k\,;y_1\rangle & & \cdots & \langle x_k\,;x_k\rangle\end{vmatrix}$$

$$=\|y_2\|^2\,G\left(x_1,\cdots x_k\right)+G\left(y_1,x_1,\cdots x_k\right)$$

Or $y_1\in F=Vec(x_1,\cdots,x_k)$ donc $\left(y_1,x_1,\cdots x_k\right)$ liée et $G\left(y_1,x_1,\cdots x_k\right)=0$.

D'où : $\|y_2\|^2=\dfrac{G\left(y,x_1,\cdots x_k\right)}{G\left(x_1,\cdots x_k\right)}$.

6° EXERCICE

1° Question

Bilinéarité et symétrie ressortent de la catégorie « vérification immédiate ». De plus :

$\int_{-1}^{1}P(t)^2\,dt\geq 0$

$\int_{-1}^{1}P(t)^2\,dt=0\Rightarrow P=0$, puisque $t\mapsto P(t)$ continue sur $\mathbb{R}$.

On a donc bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2° Question

$L_i(X) = D^i(X^2-1)^i$. Ces polynômes, à un coefficient multiplicatif près, sont connus sous le nom de polynôme de Legendre. Les premiers sont aisés à calculer :

$L_0(X)=1, L_1(X)=2X, L_2(X)=12X^2-4$.

Par ailleurs $(X^2-1)^i$ est de degré $2i$, $L_i(X)=D^i(X^2-1)^i$ est donc de degré $2i-i=i$. La liste $\left(L_0,L_1,\cdots,L_n\right)$ est échelonnée et forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (exercice 0.1).

La suite va montrer que cette base est orthogonale.

Petite remarque préalable : 1 et –1 sont racines multiples d'ordre i de $(X^2-1)^i$ donc sont aussi racines de $D^l(X^2-1)^i$ pour $l<i$.

Soit $j<k$

$$\left\langle L_j\,;L_k\right\rangle = \int_{-1}^{1} D^j(t^2-1)^j\, D^k(t^2-1)^k\,dt = \int_{-1}^{1} D^j(t^2-1)^j\, D\left(D^{k-1}(t^2-1)^k\right)dt$$

En intégrant par partie :

$$\left\langle L_j\,;L_k\right\rangle = \left[D^j(t^2-1)^j\, D^{k-1}(t^2-1)^k\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} D^{j+1}(t^2-1)^j\, D^{k-1}(t^2-1)^k\,dt$$

Or, selon la remarque préalable, $D^{k-1}(t^2-1)^k$ s'annule en 1 et –1 :

$$\left\langle L_j\,;L_k\right\rangle = -\int_{-1}^{1} D^{j+1}(t^2-1)^j\, D^{k-1}(t^2-1)^k\,dt\ .$$

Il reste à itérer le procédé pour aboutir à :

$$\left\langle L_j\,;L_k\right\rangle = (-1)^j\int_{-1}^{1} \underbrace{D^{2j+1}(t^2-1)^j}_{=0}\, D^{k-j-1}(t^2-1)^k\,dt = 0$$

7° PROBLÈME

1° Question

La symétrie de Φ frise l'évidence.

Par ailleurs : $\Phi(x,x)=\dfrac{1}{2}\left(\|2x\|^2-\|x\|^2-\|x\|^2\right)=\|x\|^2$ et $\|\ \|$ est une norme.

2° Question

Selon l'égalité du parallélogramme :

$$\Phi(x,y)=\frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2\right)=\frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2-\frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2\right)\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right)$$

a)

$$\Phi(-x,y)=\frac{1}{4}\left(\|-x+y\|^2-\|-x-y\|^2\right)=\frac{1}{4}\left(\|x-y\|^2-\|x+y\|^2\right)=-\Phi(x,y)$$

b)

$$\Phi(x+x',y)=\frac{1}{4}\left(\|x+x'+y\|^2-\|x+x'-y\|^2\right)$$

ajoutons $\|x-x'-y\|^2$ pour l'enlever un peu plus loin…

$$\Phi(x+x',y)=\frac{1}{4}\left(\underbrace{\|x+x'+y\|^2+\|x-x'-y\|^2}_{1)}\underbrace{-\|x+x'-y\|^2-\|x-x'-y\|^2}_{2)}\right)$$

Or selon l'égalité du parallélogramme :

1) : $\|x+(x'+y)\|^2+\|x-(x'+y)\|^2=2\|x\|^2+2\|x'+y\|^2$

2) : $-\|(x-y)+x'\|^2-\|(x-y)-x'\|^2=-2\|x-y\|^2-2\|x'\|^2$

En reportant :

$$\Phi(x+x',y)=\frac{1}{2}\left(\|x\|^2+\|x'+y\|^2-\|x-y\|^2-\|x'\|^2\right)$$

La encore on rajoute un terme pour l'enlever plus loin…

$$\Phi(x+x',y)=\frac{1}{2}\left(\underbrace{\|x'+y\|^2-\|x'\|^2-\|y\|^2}_{=\Phi(x',y)}-\underbrace{\left(\|x-y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2\right)}_{=\Phi(x,-y)}\right)$$

$$=\Phi(x',y)-\Phi(x,-y)$$

Et selon la symétrie de Φ et a) :

$$\Phi(x+x',y)=\Phi(x,y)+\Phi(x',y).$$

3° Question

$$\Phi(\alpha x,y)=\alpha\Phi(x,y)$$

a) $\alpha\in\mathbb{N}$

Récurrence sur α :

la formule est vraie pour $\alpha=0$.

En la supposant vraie au rang α :

$\Phi\big((\alpha+1)x,y\big)=\Phi(\alpha x+x,y)=\Phi(\alpha x,y)+\Phi(x,y)$ (selon la 2° question)

$\Phi\big((\alpha+1)x,y\big)=\alpha\Phi(x,y)+\Phi(x,y)=(\alpha+1)\Phi(x,y)$

(selon l'hypothèse de récurrence)

b) Extension à $\mathbb{Z}$

Si $\alpha\in\mathbb{Z}-\mathbb{N}$, $-\alpha\in\mathbb{N}$ et $\Phi(\alpha x,y)=\Phi(-(-\alpha)x,y)=-\Phi(-\alpha)x,y)=\alpha\Phi(x,y)$.

c) Extension à $\mathbb{Q}$

Si $\alpha = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*$,

$$\Phi(\alpha x, y) = \Phi\left(\frac{p}{q}x, y\right) = \frac{1}{q}q\Phi\left(\frac{p}{q}x, y\right) = \frac{1}{q}\Phi\left(q\frac{p}{q}x, y\right) = \frac{p}{q}\Phi(x, y).$$

4° Question

$\alpha \mapsto \Phi(\alpha x, y) = \frac{1}{2}\left(\|\alpha x + y\|^2 - \|\alpha x\|^2 - \|y\|^2\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$ du fait de la continuité de la norme sur E et des opération algébriques usuelles.

Tout réel α est limite d'une suite de Cauchy de rationnels :

$\alpha = \underset{k \to +\infty}{Lim}\, \alpha_k, \alpha_k \in \mathbb{Q}$.

$$\Phi(\alpha x, y) = \Phi\left(\underset{k \to +\infty}{Lim}\, \alpha_k x, y\right) = \underset{k \to +\infty}{Lim}\, \Phi(\alpha_k x, y) = \underset{k \to +\infty}{Lim}\left(\alpha_k \Phi(x, y)\right)$$

$$= \underset{k \to +\infty}{Lim}\left(\alpha_k \Phi(x, y)\right) = \underset{k \to +\infty}{Lim}(\alpha_k)\Phi(x, y) = \alpha\Phi(x, y).$$

8° EXERCICE

Base orthonormale de F : un vecteur unitaire colinéaire à V comme $\frac{1}{2}V$ fait l'affaire

Base orthonormale de $F^\perp$:

$$U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F^\perp \Leftrightarrow V^*U = 0 \Leftrightarrow x + iy + (1+i)z = 0.$$

On peut choisir : $U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$ qui est unitaire.

Reste à déterminer un deuxième vecteur U_2 orthogonal à V et U_1 donc vérifiant : $\begin{cases} V^*U_2 = 0 \\ U_1^*U_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + iy + (1+i)z = 0 \\ x - iy = 0 \end{cases}$

Le vecteur unitaire $U_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1-i \end{pmatrix}$ convient.

Commentaire : $\left(\frac{1}{2}V, U_1, U_2\right)$ forme une base orthonormale de $\mathbb{C}^3$. Selon la proposition III.63, la matrice de changement de base :

$$Q=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{2} & i/2 \\ -i/2 & i/\sqrt{2} & 1/2 \\ (1-i)/2 & 0 & (-1-i)/2 \end{pmatrix}$$ est unitaire :

```
> Q:=matrix([[1/2, 1/sqrt(2), I/2], [-I/2, I/sqrt(2), 1/2], [(1-I)/2, 0, (-1-I)/2]]);
```

$$Q:=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}I \\ \frac{-1}{2}I & \frac{1}{2}I\sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}I & 0 & \frac{-1}{2}-\frac{1}{2}I \end{bmatrix}$$

```
> multiply(Q, htranspose(Q));
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9° EXERCICE

1° Question

Le corollaire III.62 assure que $Q\in U(n)\Rightarrow |Det(Q)|=1$. Donc si on considère le morphisme de groupe : $(U(n),\times)\xrightarrow{Det}(\mathbb{C}^*,\times)$, son noyau $\{Q\in U(n)\ /Det(Q)=1\}$ est un sous-groupe de $U(n)$.

2° Question

Il est clair que toute matrice de la forme proposée est unitaire et de déterminant 1.

Réciproquement :

Soit $Q=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$Q\in SU(2)\Leftrightarrow \begin{cases} a\overline{a}+b\overline{b}=1 \\ c\overline{c}+d\overline{d}=1 \\ a\overline{c}+b\overline{d}=0 \\ ad-bc=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ca\overline{a}+cb\overline{b}=\overline{c} \\ ca\overline{c}+ad\overline{d}=a \\ a\overline{c}=-b\overline{d} \\ ad-bc=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -b\overline{d}\,\overline{a}+\overline{c}b\overline{b}=\overline{c} \\ -cb\overline{d}+ad\overline{d}=a \\ a\overline{c}=-b\overline{d} \\ ad-bc=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b\underbrace{(-\overline{d}\,\overline{a}+\overline{c}\overline{b})}_{=-1}=\overline{c} \\ \overline{d}\underbrace{(-cb+ad)}_{=1}=a \\ ad-bc=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -b=\overline{c} \\ \overline{d}=a \\ ad-bc=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=-\overline{b} \\ d=\overline{a} \\ a\overline{a}+b\overline{b}=1 \end{cases}$$

10° EXERCICE

1° Question

La linéarité de l'intégrale permet de vérifier aisément :

$\langle f+f' ; g\rangle = \langle f ; g\rangle + \langle f' ; g\rangle$

$\langle \alpha f ; g\rangle = \alpha \langle f ; g\rangle \quad \alpha \in \mathbb{C}$

Ensuite :

$\overline{\langle f ; g\rangle} = \overline{\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt} = \int_0^{2\pi} \overline{f(t)}g(t)dt = \langle g ; f\rangle$.

Enfin :

$\langle f ; f\rangle = \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \geq 0$ et

$\langle f ; f\rangle = 0 \Rightarrow \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = 0 \Rightarrow f(t) = 0$ sur $[0, 2\pi]$ puisque f et donc $t \mapsto |f(t)|^2$ est continue sur $[0, 2\pi]$.

2° Question

$\langle f_k ; f_j\rangle = \int_0^{2\pi} e^{ikt}e^{-ijt} = \begin{cases} 2\pi \text{ si } k=j \\ 0 \text{ si } k \neq j \end{cases}$ (voir exercice 0.5).

La liste n'est pas orthonormale puisque $\langle f_k ; f_k\rangle = 2\pi$.

Si on souhaite une liste orthonormale il faut définir : $f_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt}$.

11° EXERCICE

La liste $(e_1, \cdots, e_k)$ étant orthonormale il s'ensuit que $k \leq n$. Cette liste peut être complétée (proposition III.58) en une base orthonormale $(e_1, \cdots, e_n)$. Dans cette base les coordonnées d'un vecteur x sont : $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ où $x_i = \langle x ; e_i\rangle$. et

$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |x|_i^2 \geq \sum_{i=1}^{k} |x|_i^2$.

12° EXERCICE

À ceci près que la condition $\langle e_i ; u_i\rangle > 0$ perd son sens puisque $\langle e_i ; u_i\rangle$ n'appartient pas à priori à $\mathbb{R}$, la réponse est positive. Pour s'en convaincre, il suffit de reprendre la démonstration de la proposition III.31…

CHAPITRE IV

PETITES QUESTIONS POUR FAIRE LE POINT

1. $Ker(f) \neq \{0\}$, *f* n'est pas inversible et $Det(f) = 0$.

2. Oui, si *v* vecteur propre associé à λ, tout vecteur non nul colinéaire à *v* l'est de même.

Non : $\begin{cases} f(v) = \lambda v \\ f(v) = \mu v \end{cases} \Rightarrow (\lambda - \mu)v = 0 \Rightarrow \lambda = \mu$ puisque $v \neq 0$.

3. Oui : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ par exemple.

4. Oui : proposition IV.12

5. Tout dépend de la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre double. Elle sera diagonalisable si et seulement si ce sous-espace est de dimension 2 (voir corollaire IV.11).

6. Elle sera diagonalisable si et seulement si la dimension du sous-espace propre associé à cette unique valeur propre λ est 3. Mais alors $E_\lambda = E$ et pour tout *X*, $MX = \lambda X$. La matrice est donc une matrice d'homotéthie donc déjà diagonale.

7. Pour les valeurs propres, la réponse est immédiate puisque, les matrices *M* et M' semblables expriment un même endomorphisme *f*. On a alors : $Det(M - \lambda I) = Det(M' - \lambda I) = Det(f - \lambda I)$ et M et M' ont le même polynôme caractéristique.
Pour les vecteurs propres, c'est plus subtil : en terme « intrinséque » (sans référence à une base), les vecteurs propres sont les mêmes puisqu'il s'agit d'un même endomorphisme… En terme de matrices, si *M* exprime *f* dans une base $\boldsymbol{b}$ et M' dans une base $\boldsymbol{b'}$, les vecteurs propres *v* de *f* auront des coordonnées à priori différentes dans les bases $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{b'}$

8. Si $x = \underbrace{x_1}_{\in E_\lambda} + \underbrace{x_2}_{\in E_\mu}$, $f(x) = f(x_1) + f(x_2) = \underbrace{\lambda x_1}_{\in E_\lambda} + \underbrace{\mu x_2}_{\in E_\mu}$ donc $f(x) \in E_\lambda \oplus E_\mu$.

9. Oui : voir proposition IV.19.

10. Oui puisque les valeurs propres de M sont les n racines (distinctes) nième de l'unité : $1, e^{\frac{2\pi}{n}i}, \cdots, e^{(n-1)\frac{2\pi}{n}i}$ et la proposition IV.12 s'applique.

11. Non pas nécessairement. Les matrices A_4 et A_3 du cours ont le même polynôme caractéristique : $C_{A_3}(X) = C_{A_4}(X) = -(X-2)(X-1)^2$, mais l'une est diagonalisable et l'autre pas…

12. Oui, exemple : $\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ a pour valeurs propres 0 et 2. Nous verrons ultérieurement que c'est le cas pour toute matrice hermitienne, autrement dit de toute matrice égale à son adjointe selon la définition III.44.

13. Qu'elle admet aussi comme valeur propre $\overline{1+2i} = 1-2i$ (proposition IV.13).

14. Oui car elle admet aussi comme valeurs propres $1-i$ et $2+i$, ce qui donne 4 valeurs propres distinctes et la proposition IV.12 s'applique.

15. Non pas nécesairement : voir la réponse à la question 11.

16. Oui : elle est triangulable (corollaire IV.16) et :
$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, $Det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ (corollaire IV.17).
On peut aussi justifier la réponse en s'appuyant sur la proposition IV.3.

17. Une matrice antisymétrique a tous les termes de sa diagonale nulle (voir définition 0.23). Elle est de trace nulle et la somme de ses valeurs propres répétées selon l'ordre de multiplicité est nulle.

18. $Tr(A) = 6$. Donc $\lambda_3 = 2$.

19. Oui. Elle est triangulaire et ses valeurs propres sont exposées sur sa diagonale. Il suffit d'observer qu'elles sont distinctes…

20. $Spec(A \oplus B) = Spec(A) \cup Spec(B)$. En effet :

$$C_{A\oplus b}(\lambda) = Det(A \oplus B - \lambda I) = \left|\begin{array}{c|c} A-\lambda I & 0 \\ \hline 0 & B-\lambda I \end{array}\right|$$

$$= Det(A-\lambda I)Det(B-\lambda I) \text{ (proposition II.18)}$$

$$= C_A(\lambda)C_B(\lambda)$$

21. Elle n'est pas vraiment triangulaire, mais dans le calcul du déterminant cela ne va pas changer grand chose :

$$Det(M-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda)$$

$Spec(M) = \{-1, 1, 2, 4\}$.

22. Elle est de rang 1, son noyau E_0 est de diemsion $n-1$ et admet 0 comme valeur propre de multiplicité 0. Sa trace est n et l'autre valeur propre est donc n.

23. Elle est de taille 4×4. D'après la proposition IV.3, son déterminant est 4, sa trace 2.

24. $C_A(X) = C_B(X) \Rightarrow Spec(A) = Spec(B)$

Mais la réciproque est fausse : deux polynômes caractéristiques distincts peuvent avoir les mêmes racines. Exemple :

$$C_A(X) = (X-1)^2(X-2)$$

$$C_B(X) = (X-1)(X-2)^2$$

1° EXERCICE

$C_{A_t}(X) = -(X-1)^2(X+1)$.

-1 valeur propre simple et 1 valeur propre double.

$E_{-1} = Vec(u)$ avec $u\begin{pmatrix} t-6 \\ -2\sqrt{2} \\ t+2 \end{pmatrix}$

$E_1 = ?$

$$(A_t - I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + t\sqrt{2}y + 3z = 0 \\ -x + z = 0 \\ x + t\sqrt{2}y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\sqrt{2}y = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}$$

Si $t \neq 0$, $E_1 = Vec(v)$ avec $v\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et A_t n'est pas diagonalisable.

Si $t = 0$, $E_1 = Vec(v, w)$ avec $v\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et A_t est diagonalisable.

$C_{B_t}(X) = (X+1)(1+2\cos t - X)(X + 2\cos t)$.

$Spec(B_t) = \{-1, -2\cos t, 1+2\cos t\}$. Mais attention ces valeurs ne sont pas nécessairement distinctes…

a) $-1 = -2\cos t \Leftrightarrow \cos t = \dfrac{1}{2}$ et $Spec(B_t) = \{-1, 2\}$. Dans ce cas :

$$B_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{-1} = Vec\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \quad E_2 = Vec\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

B_t est diagonalisable.

b) $-1 = 1 + 2\cos t \Leftrightarrow \cos t = -1$ et $Spec(B_t) = \{-1, 2\}$. Dans ce cas :

$$B_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{-1} = Vec\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad E_2 = Vec\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

B_t n'est pas diagonalisable.

c) $-2\cos t = 1 + 2\cos t \Leftrightarrow \cos t = -\dfrac{1}{4}$ et $Spec(B_t) = \left\{-1, \dfrac{1}{2}\right\}$. Dans ce cas :

$$B_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{-1} = Vec\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \quad E_{\frac{1}{2}} = Vec\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

B_t n'est pas diagonalisable.

d) Dans tous les autres cas : $\cos t \notin \left\{\dfrac{1}{2}, -1, -\dfrac{1}{4}\right\}$, les trois valeurs propres sont distinctes et B_t est diagonalisable.

2° EXERCICE

$$C_M(X) = Det(M - XI) = \begin{vmatrix} a-X & 0 & 0 & b \\ 0 & a-X & b & 0 \\ 0 & b & a-X & 0 \\ b & 0 & 0 & a-X \end{vmatrix} =$$

$$(a-X)\Big((a-X)\big((a-X)^2 - b^2\big)\Big) - b\Big(b\big((a-X)^2 - b^2\big)\Big) =$$

$$\big((a-X)^2 - b^2\big)^2 = \underline{(a-b-X)^2(a+b-X)^2}$$

$Spec(M) = \{a+b, a-b\}$.

Le cas $a+b = a-b$ est simple à traiter puisqu'alors $b = 0$ et $A = aI$. Sinon, on est en présence de deux valeurs propres sont d'ordre 2.

En posant $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, on détermine :

E_{a+b}

$$\big(M - (a+b)I\big)V = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -bx + bt = 0 \\ -by + bz = 0 \end{cases} \underset{(car\ b\neq 0)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = t \\ y = z \end{cases}$$. D'où :

$$E_{a+b} = Vec\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \text{ et } Dim(E_{a+b}) = 2$$

E_{a-b}

$\big(M-(a-b)I\big)V=0 \Leftrightarrow \begin{cases} bx+bt=0 \\ by+bz=0 \end{cases} \underset{(car\ b\neq 0)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=-t \\ y=-z \end{cases}$. D'où :

$$E_{a-b}=Vec\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}\right) \text{ et } Dim(E_{a-b})=2$$

Comme $Dim(E_{a+b})+Dim(E_{a-b})=4$, la matrice est diagonalisable.

3° EXERCICE

On va sous-traiter cet exercice :

```
> with(linalg):
> M:=matrix([[I, 0, 1-I], [I-1, 1, 1-I], [0, 0, 1]]);
```

$$M:=\begin{bmatrix} I & 0 & 1-I \\ -1+I & 1 & 1-I \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> charpoly(M,X);
```

$$(X-I)\,(X-1)^2$$

```
> eigenvalues(M);
```

$$I,\ 1,\ 1$$

```
> eigenvectors(M);
```

$$[I,\ 1,\ \{[1,\ 1,\ 0]\}],\ [1,\ 2,\ \{[0,\ 1,\ 0],\ [1,\ 0,\ 1]\}]$$

```
> with(procalgebre);
```

$[\,determinant\,,\ diago\,,\ gershgorin\,,\ inverseGJ,\ inverseplus\,,\ inverseplusr\,,\ pivotG\,,\ pivotG2\,,\ pivotGJ,$
$reductible\,]$

```
> diago(M);
```

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> P:=%[2];
```

$$P:=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> inverse(P);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4° EXERCICE

1° Question

$C_M(X) = (1-X)\left(X^2-(1+a_2)X+a_2-b_1c_1-b_2c_2\right)$.

Le discriminant du deuxième facteur est :

$\Delta = (1+a_2)^2-4a_2+4b_1c_1+4b_2c_2 = (1-a_2)^2+4b_1c_1+4b_2c_2$

Et les hypothèses $b_1c_1>0, b_2c_2>0$ imposent $\Delta>0$.

Ce deuxième facteur a deux racines réelles distinctes. Encore faut-il qu'elles soient distinctes de 1.

Si 1 était racine de ce facteur $X^2-(1+a_2)X+a_2-b_1c_1-b_2c_2$, alors $b_1c_1+b_2c_2=0$, ce qui contredirait les hypothèses $b_1c_1>0, b_2c_2>0$.

Donc *M* a trois valeurs propres distinctes et est diagonalisable.

2° Question

Soit $M=\begin{pmatrix}1 & b_1 & 0\\ b_1 & a_2 & b_2\\ 0 & b_2 & 1\end{pmatrix}$ symétrique :

$$\begin{cases}0\in Spec(M\\ 2\in Spec(M)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_2=b_1^2+b_2^2\\ 2-a_2=b_1^2+b_2^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_2=1\\ b_1^2+b_2^2=1\end{cases}.$$

On peut choisir, par exemple (mais on peut trouver plus tordu…) : $b_1=1, b_2=0, a_2=1$

et $M=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Comme vecteurs propres associés à 0, 1, 2, on peut donner $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, ce qui conduit à la matrice de changement de base : $P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ et à son inverse $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$.

5° EXERCICE

1° Question

$C_{R_t}(X) = (\cos t - X)^2 + \sin^2 t$. Les valeurs propres sont e^{it} et e^{-it} donc non réelles si $t \neq k\pi$ (si $t = k\pi$, $R_t = \pm I$). Interprétation géométrtique dans une rotation du plan $\mathbb{R}^2$, aucun vecteur n'est colinéaire à son image (sauf si $t = k\pi$).

2° Question

$C_{S_t}(X) = X^2 - \cos^2 t - \sin^2 t = X^2 - 1$. Les valeurs propres sont -1 et 1 et S_t est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

$$E_1 = \left\{ u \in \mathbb{R}^2 \;\; / S_t(u) = u \right\} = Vec\left(\begin{pmatrix} \cos(t/2) \\ \sin(t/2) \end{pmatrix} \right)$$

$$E_{-1} = \left\{ u \in \mathbb{R}^2 \;\; / S_t(u) = -u \right\} = Vec\left(\begin{pmatrix} \sin(t/2) \\ -\cos(t/2) \end{pmatrix} \right)$$

sont les deux sous-espaces définissant la symétrie et sont orthogonaux pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$.

6° EXERCICE

$C_A(X) = -(X-1)^3$.

1 est valeur propre triple. Si *A* était diagonalisable, E_1 serait de dimension 3 et *A* serait la matrice identique ce qu'elle n'est visiblement pas.

Un petit calcul montre d'ailleurs que $E_1 = Vec\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Pour que l'endomorphisme *f* représentée par la matrice *A* soit représentée dans une autre base (u, v, w) par la matrice $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, il faut et il suffit que :

$$\begin{cases} f(u) = u \\ f(v) = u + v \\ f(w) = v + w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A - I)U = U \\ (A - I)V = U \\ (A - I)W = V \end{cases}$$

Pour *U*, on peut prendre le vecteur propre $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Il reste ensuite à résoudre :

$$(A-I)V=U \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y \quad =1 \\ \quad -y+z=1 \\ x-3y+2z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y \quad =1 \\ \quad -y+z=1 \end{cases}$$

Et on peut choisir : $V=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Puis :

$$(A-I)W=V \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y \quad =-1 \\ \quad -y+z=0 \\ x-3y+2z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y \quad =-1 \\ \quad -y+z=0 \end{cases}$$

et on peut choisir : $V=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Il reste à vérifier que (u,v,w) est bien une base :

$$Det(u,v,w)=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=1.$$

7° EXERCICE

1° Question

Si *f* et *g* possèdent une base propre commune ***b*** :

$M_{\boldsymbol{b}}(f)=Diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) \quad M_{\boldsymbol{b}}(g)=Diag(\mu_1,\cdots,\mu_n)$

Les matrices diagonales ayant le bon goût de commuter :

$M_{\boldsymbol{b}}(fg)=M_{\boldsymbol{b}}(f)M_{\boldsymbol{b}}(g)=M_{\boldsymbol{b}}(g)M_{\boldsymbol{b}}(f)=M_{\boldsymbol{b}}(gf)$.

Et $M_{\boldsymbol{b}}(fg)=M_{\boldsymbol{b}}(gf) \Leftrightarrow fg=gf$.

2° Question

Soit $x \in E_\lambda$:

$f(x)=\lambda x \Rightarrow g\big(f(x)\big)=\lambda g(x)$ et en appliquant $fg=gf$: $f\big(g(x)\big)=\lambda g(x)$.

Donc $g(x) \in E_\lambda$.

E_λ est donc stable pour g . La restriction $g_{|E_\lambda}$ est un endomorphisme de E_λ et possède au moins une valeur propre μ (on est sur $\mathbb{C}$ donc le polynôme caractéristique a au moins une racine) associée à un vecteur propre. Il existe donc $y \in E_\lambda - \{0\}$ tel que $g(y)=\mu y$.

En résumé chaque sous-espace propre E_λ de *f* contient un vecteur propre de *g*.

3° Question

Si *f* a *n* valeurs propres distinctes $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$, elle est diagonalisable dans une base propre $(v_1,\cdots,v_n)$. Pour tout $i=1\cdots n$, $E_{\lambda_i}=Vec(v_i)$. Or d'après la question précédente, E_{λ_i} contient un vecteur propre de *g*. Ce vecteur propre est colinéaire à v_i qui est donc vecteur propre de *g*. $(v_1,\cdots,v_n)$ est donc une base propre commune à *f* et *g*.

8° EXERCICE

1° Question

Supposons *A* inversible.

$$C_{AB}(\lambda)=Det(AB-\lambda I)=Det\left(A(B-\lambda A^{-1})\right)=\underbrace{Det(A)Det(B-\lambda A^{-1})}_{\text{scalaires commutables}}$$

$$=Det(B-\lambda A^{-1})Det(A)=Det\left((B-\lambda A^{-1})A\right)=Det(BA-\lambda I)=C_{BA}(\lambda)$$

2° Question

a) Si $0\in Spec(AB)$, alors $Det(AB-0I)=0$.

Or $Det(AB)=\underbrace{Det(A)Det(B)}_{\text{scalaires commutables}}=Det(B)Det(A)=Det(BA)$.

Donc $Det(BA)=0$ et $0\in Spec(BA)$.

b) Supposons $(I-\alpha AB)$ inversible. On a alors :

$$(I-\alpha BA)\left(I+\alpha B(I-\alpha AB)^{-1}A\right)=I-\alpha BA+(I-\alpha BA)\alpha B(I-\alpha AB)^{-1}A=$$

$$I-\alpha BA+\alpha(B-\alpha BAB)(I-\alpha AB)^{-1}A=I-\alpha BA+\alpha B\underbrace{(I-\alpha AB)(I-\alpha AB)^{-1}}_{=I}A$$

$$=I-\alpha BA+\alpha BA=I$$

La matrice $I+\alpha B(I-\alpha AB)^{-1}A$ est inverse de $I-\alpha BA$. Cette dernière est donc inversible.

On a donc établit :

$(I-\alpha AB)$ inversible $\Rightarrow (I-\alpha BA)$ inversible.

Et en échangeant le rôle des matrices *A* et *B* :

$(I-\alpha AB)$ inversible $\Leftrightarrow (I-\alpha BA)$ inversible.

c) Soit $\lambda\in Spec(AB)$. Si λ est nul, il appartient aussi à $Spec(BA)$ d'après la première question. Sinon :

$\lambda \in Spec(AB) \Rightarrow Det(AB-\lambda I)=0 \Rightarrow Det\left(-\lambda(I-\frac{1}{\lambda}AB)\right)=0 \Rightarrow$

$I-\frac{1}{\lambda}AB$ non inversible $\Rightarrow I-\frac{1}{\lambda}BA$ non inversible $\Rightarrow$

$BA-\lambda I$ non inversible $\Rightarrow Det(BA-\lambda I)=0 \Rightarrow \lambda \in Spec(BA)$

Donc $Spec(AB) \subseteq Spec(BA)$. Et en échangeant le rôle des matrices A et B on établit l'inclusion dans l'autre sens d'où l'égalité.

9° EXERCICE

Si $X=0$, la réponse est évidente. Sinon : XX^t ayant toutes ses colonnes colinéaires à X est de rang 1. Donc 0 est valeur propre et $E_0 = Ker(A)$ est de rang $n-1$.

Par ailleurs : $AX = X\underbrace{X^tX}_{=\|X\|_2^2} = \|X\|_2^2 X$. Donc X est vecteur propre associé à la valeur propre non nulle $\|X\|_2^2$.

En résumé :

0 valeur propre de multiplicité $n-1$ avec $Dim(E_0)=n-1$,

$\|X\|_2^2$ valeur propre simple avec $E_{\|X\|_2^2} = Vec(X)$,

A est diagonalisable.

On peut remarquer de plus :

$Y \in E_0 \Leftrightarrow Y \in Ker(A) \Leftrightarrow AY=0 \Leftrightarrow X\underbrace{X^tY}_{scalaire}=0 \Leftrightarrow X^tY=0 \Leftrightarrow Y \perp X$

Donc $E_0 = Vec(X)^{\perp}$.

10° EXERCICE

Les seuls vecteurs propres possibles sont 1 et –1.

$E_1 = \left\{A \ / A = A^t\right\}$ sous-espace des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(K)$.

$E_{-1} = \left\{A \ / A = -A^t\right\}$ sous-espace des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(K)$.

Et l'exemple suivant la définition I.26 montre précisément que :

$$\mathcal{M}_n(K) = E_1 \oplus E_{-1}$$

Ce qui montre que T est diagonalisable.

11° EXERCICE

1° Question

Si P est de degré $\leq n$, $XP(X)-\frac{1}{n}(X^2-1)DP(X)$ est lui même de degré $\leq n$.

Donc Φ est bien une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\Phi\left(\alpha P(X)+\beta Q(X)\right)=X\left(\alpha P(X)+\beta Q(X)\right)-\frac{1}{n}(X^2-1)D\left(\alpha P(X)+\beta QX)\right)$$

$$=\alpha XP(X)+\beta XQ(X)-\frac{1}{n}(X^2-1)\alpha D\left(P(X)\right)-\frac{1}{n}(X^2-1)\beta D\left(Q(X)\right)$$

$$=\alpha\left(XP(X)-\frac{1}{n}(X^2-1)D\left(P(X)\right)\right)+\beta\left(XQ(X)-\frac{1}{n}(X^2-1)D\left(Q(X)\right)\right)$$

$$=\alpha\Phi(P(X))+\beta\Phi(Q(X))$$

Donc Φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Les images par Φ de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ sont :

$$\Phi(1)=X$$
$$\vdots$$
$$\Phi(X^i)=\frac{1}{n}\left((n-i)X^{i+1}+iX^{i-1}\right)$$
$$\vdots$$
$$\Phi(X^n)=X^{n-1}$$

D'où la matrice de Φ dans cette base :

$$M=\frac{1}{n}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & n-1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2° Question

$Q_k(X)=(X+1)^k(X-1)^{n-k}$.

$$\Phi\left(Q_k(X)\right)=X(X+1)^k(X-1)^{n-k}$$
$$-\frac{1}{n}(X^2-1)\left(k(X+1)^{k-1}(X-1)^{n-k}+(n-k)(X+1)^k(X-1)^{n-k-1}\right)$$

$$\begin{aligned}\Phi\big(Q_k(X)\big) &= X(X+1)^k(X-1)^{n-k} \\ &\quad -\frac{1}{n}\Big(k(X+1)^k(X-1)^{n-k+1}+(n-k)(X+1)^{k+1}(X-1)^{n-k}\Big) \\ &= (X+1)^k(X-1)^{n-k}\left(X-\frac{k}{n}(X-1)-\frac{n-k}{n}(X+1)\right) \\ &= Q_k(X)\left(\frac{nX-kX+k-(n-k)X-(n-k)}{n}\right) \\ &= \frac{2k-n}{n}Q_k(X)\end{aligned}$$

Donc $Q_k(X)$ vecteur propre associée à la valeur propre $\lambda_k=\dfrac{2k-n}{n}$.

Φ possède donc $n+1$ valeurs propres distinctes :

$$-1,\frac{2-n}{n},\cdots,\frac{n-2}{n},1$$

Petite remarque terminale : si n est pair $0\in Spec(\Phi)$ qui n'est pas alors un isomorphisme.

12° EXERCICE

1° Question

Pour $\tau\geq 0$

$\begin{pmatrix}u_{\tau+2}\\ u_{\tau+1}\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}u_{\tau+1}\\ u_{\tau}\end{pmatrix}$ avec $M=\begin{pmatrix}5 & -6\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

$Spec(M)=\{2,3\}$. M est diagonalisable et $u_\tau=\alpha 2^\tau+\beta 3^\tau$. Les constantes α,β sont déterminées part les conditions initiales :

$\begin{cases}u_0=12\\ u_1=31\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=12\\ 2\alpha+3\beta=31\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=5\\ \beta=7\end{cases}$. D'où : $u_\tau=5\times 2^\tau+7\times 3^\tau$.

2° Question

Pour $\tau\geq 0$

$\begin{pmatrix}u_{\tau+2}\\ u_{\tau+1}\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}u_{\tau+1}\\ u_{\tau}\end{pmatrix}$ avec $M=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

$Spec(M)=\{1,-1/2\}$. M est diagonalisable et $u_\tau=\alpha+\beta\left(-1/2\right)^\tau$. Les constantes α,β sont déterminées part les conditions initiales :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_1 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = a \\ \alpha - \beta / 2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{a+2b}{3} \\ \beta = \dfrac{2a-2b}{3} \end{cases}.$$

D 'où : $u_\tau = \dfrac{a+2b}{3} + \dfrac{2a-2b}{3}(-1/2)^\tau$ et $\underset{\tau \to +\infty}{Lim}\, u_\tau = \dfrac{a+2b}{3}$.

3° Question

Pour $\tau \geq 0$

$$\begin{pmatrix} u_{\tau+3} \\ u_{\tau+2} \\ u_{\tau+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_{\tau+2} \\ u_{\tau+1} \\ u_\tau \end{pmatrix} \text{ avec } M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$Spec(M) = \{1, -1, -2\}$. M est diagonalisable et $u_\tau = \alpha + \beta(-1)^\tau + \gamma(-2)^\tau$. Les constantes α, β, γ sont déterminées part les conditions initiales :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ u_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \alpha - \beta - 2\gamma = 1 \\ \alpha + \beta + 4\gamma = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = \gamma = 0 \end{cases}.$$ D 'où : $u_\tau = 1$!

13° EXERCICE

1° Question

$$\begin{cases} x_{\tau+1} = y_\tau + 3z_\tau \\ y_{\tau+1} = \dfrac{1}{2} x_\tau \\ z_{\tau+1} = \dfrac{1}{3} y_\tau \end{cases} \Leftrightarrow X_{\tau+1} = MX_\tau \text{ avec } X_\tau = \begin{pmatrix} x_\tau \\ y_\tau \\ z_\tau \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

2° Question

La question sur la « stabilité » de la population est (volontairement) ambiguë. Elle peut être interprétée de trois manières :

1) Stabilité globale : $x_{\tau+1} + y_{\tau+1} + z_{\tau+1} = x_\tau + y_\tau + z_\tau$,
2) Stabilité en proportion générationnelle : $X_{\tau+1} = \alpha X_\tau$,
3) Stabilité générationnelle (donc aussi globale) : $X_{\tau+1} = X_\tau$.

Interprétation 1) : stabilité globale

Si l'on pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_\tau + y_\tau + z_\tau = U^t X_\tau$.

Cette première interprétation amène à résoudre :

$U^t X_{\tau+1} = U^t X_\tau \Leftrightarrow U^t (M - I) X_\tau = 0 \Leftrightarrow 3x_\tau - 2y_\tau - 12z_\tau = 0$

ce qui est l'équation d'un hyperplan *H* dont on peut citer comme base :

$$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Mais on bute sur le problème suivant :

Si $X_\tau \in H$, alors la population globale reste inchangée à la date $\tau + 1$, mais rien ne garantit que $X_{\tau+1} \in H$ et donc que cette stabilité perdure à la date $\tau + 2$.

La condition $X_{\tau+1} \in H$ est équivalente à :

$U^t (M - I) X_{\tau+1} = 0 \Leftrightarrow U^t (M - I) M X_\tau \Leftrightarrow x_\tau + y_\tau - 9z_\tau = 0$

équation qui définit un autre hyperplan H' et $H \cap H' = Vec\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Mais nous allons retrouver cela en examinant les interprétations suivantes…

Interprétations 2) et 3)

Comme $\begin{pmatrix} x_{\tau+1} \\ y_{\tau+1} \\ z_{\tau+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_\tau \\ y_\tau \\ z_\tau \end{pmatrix}$, les deux dernières interprétations équivalent à dire que $\begin{pmatrix} x_\tau \\ y_\tau \\ z_\tau \end{pmatrix}$ est valeur propre de *M* associé à la valeur propre α (qui se doit d'être alors un réel positif) dans un cas ou 1 dans l'autre. Ce qui nous amène à la diagonalisation de *M*.

$C_M(X) = (1 - X)(X^2 + X + 1)$ et $Spec(M) = \left\{ 1, \frac{-1+i}{2}, \frac{-1-i}{2} \right\}$.

Les sous_espaces propres sont :

$$E_1 = Vec\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad E_{\frac{-1+i}{2}} = Vec\left(\begin{pmatrix} -6i \\ -3+3i \\ 2 \end{pmatrix} \right) \quad E_{\frac{-1-i}{2}} = Vec\left(\begin{pmatrix} 6i \\ -3-3i \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Seule la première valeur propre fournit une réponse au problème :

Toute population : $\alpha\begin{pmatrix}6\\3\\1\end{pmatrix}$ avec α réel positif est générationellement stable.

Reste la question de l'avenir de la population :

$$M^{\tau} = P\,Diag\left(1,\left(\frac{-1+i}{2}\right)^{\tau},\left(\frac{-1-i}{2}\right)^{\tau}\right)P^{-1}.$$

Comme les deux valeurs propres complexes conjuguées sont de module strictement inférieur à 1 :

$$\underset{\tau\to+\infty}{Lim}\ M^{\tau} = P\,Diag(1,0,0)\,P^{-1}$$

Et la population va converger…
Pour savoir vers quoi il faut calculer :

$$P=\begin{pmatrix}6 & -6i & 6i\\ 3 & -3+3i & -3-3i\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}\quad P^{-1}=\frac{1}{60}\begin{pmatrix}4 & 8 & 12\\ -1+3i & -2-4i & 16-6i\\ -1-3i & -2+4i & 12+6i\end{pmatrix}$$

$$P\,Diag(1,0,0)\,P^{-1}=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}6 & 12 & 18\\ 3 & 6 & 9\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

Partant d'une population initiale : $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$, la population va converger vers :

$$\frac{1}{15}\begin{pmatrix}6 & 12 & 18\\ 3 & 6 & 9\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}=\frac{x_0+2y_0+3z_0}{15}\begin{pmatrix}6\\3\\1\end{pmatrix}$$

autrement dit vers une population stable.

14° EXERCICE

1° Question

$$\begin{pmatrix}y_1'(t)\\y_2'(t)\\y_3'(t)\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\\y_3(t)\end{pmatrix}\text{ avec } M=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$Spec(M)=\{2,-2,1\}$. M est diagonalisable avec :

$$D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\quad P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\2&-1&0\end{pmatrix}$$

D'où :

$$\begin{cases}y_1(t)=k_1e^{2t}+k_2e^{-t}+k_3e^{-2t}\\y_2(t)=k_1e^{2t}+k_2e^{-t}-k_3e^{-2t}\\y_3(t)=k_12e^{2t}-k_2e^{-t}\end{cases}$$

2° Question

$$\begin{pmatrix}y_1'(t)\\y_2'(t)\\y_3'(t)\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\\y_3(t)\end{pmatrix}\text{ avec } M=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&2&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$Spec(M)=\{2,1+i,1-i\}$. M est diagonalisable avec :

$$D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1+i&0\\0&0&1-i\end{pmatrix}\quad P=\begin{pmatrix}1&i&-i\\1&-1&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

D'où :

$$\begin{cases}y_1(t)=k_1e^{2t}+k_2ie^{(1+i)t}-k_3ie^{(1-i)t}\\y_2(t)=k_1e^{2t}-k_2e^{(1+i)t}-k_3e^{(1-i)t}\\y_3(t)=k_1e^{2t}+k_2e^{(1+i)t}+k_3e^{(1-i)t}\end{cases}$$

En posant $k_2=a+ib$ et $k_3=\overline{k_2}=a-ib$, on obtient les solutions réelles :

$$\begin{cases}y_1(t)=k_1e^{2t}-e^t(2b\cos t+2b\sin t)\\y_2(t)=k_1e^{2t}-e^t(2a\cos t+2b\sin t)\\y_3(t)=k_1e^{2t}+e^t(2a\cos t+2b\sin t)\end{cases}$$

3° Question

$$\begin{pmatrix}y_1'(t)\\y_2'(t)\\y_3'(t)\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\\y_3(t)\end{pmatrix}\text{ avec } M=\begin{pmatrix}-3&1&-1\\1&-3&-1\\-2&-2&-2\end{pmatrix}$$

$Spec(M)=\{0,-4\}$. -4 est de multiplicité 2, mais comme $Dim(E_{-4})=2$, M est diagonalisable avec :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\begin{cases} y_1(t) = k_1 + k_2 e^{-4t} \\ y_2(t) = k_1 + k_3 e^{-4t} \\ y_3(t) = -2k_1 + (k_2 - k_3)e^{-4t} \end{cases}$$