CHAPITRE V

PETITES QUESTIONS POUR FAIRE LE POINT

1. *A* possède trois valeurs propres distinctes et est donc diagonalisable $M = P(A)$ avec $P(X) = X^2 - X - 2$.
Les valeurs propres de *M* sont : $P(1) = -2, P(-1) = 0, P(2) = 0$.
A étant diagonalisable, $M = P(A)$ l'est aussi (cf. proposition V.3).

2. Oui :

$$P(f)g = \left(\sum_{i=1}^{k} p_i f^i\right)g = \sum_{i=1}^{k} p_i f^i g = \sum_{i=1}^{k} p_i g f^i = g\left(\sum_{i=1}^{k} p_i f^i\right) = gP(f).$$

3. Elle est de taille 4×4. Selon le corollaire V.8 et la proposition V.9, les candidats au titre de polynôme minimal sont :

$$(X-1)^2(X+1)^2, (X-1)(X+1)^2, (X-1)^2(X+1), (X-1)(X+1).$$

Selon le théorème V.11, la matrice sera diagonalisable uniquement dans le dernier cas.

4. Non. On peut seulement en déduire que sa taille sera supérieure ou égale à 3×3. Comme polynôme caractéristique et polynôme minimal ont même racines (proposition V.9), ses valeurs propres sont 1, 2, 3 (éventuellement multiples). Selon le théorème V.11, la matrice est diagonalisable.

5. La matrice compagnon de $X^4 - 2X^3 + X^2$ est (proposition V.6) :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Son polynôme minimal $X^4 - 2X^3 + X^2$ ayant 0 comme racine double, cette matrice n'est pas diagonalisable (théorème V.11).

6. Oui : $X^3 - 1 = (X-1)\left(X - e^{i\frac{2p}{3}}\right)\left(X - e^{-i\frac{2p}{3}}\right) \in Ann(A)$ donc, selon le corollaire V.12, *A* est diagonalisable.

7. Elle est de taille 6×6.
En ce qui concerne les sous-espaces propres, on peut simplement indiquer :
$1\leq Dim(E_1)\leq 2,\ \ 1\leq Dim(E_{-1})\leq 4$.
En ce qui concerne les sous-espaces caractéristiques, le théorème V.14 permet d'être plus précis :
$Dim(N_1)=2,\quad Dim(N_{-1})=4$ et $E=N_1\oplus N_{-1}$.

8. z commute avec Id. Si $u=z+Id$, il s'agit alors de la décomposition de Dunford de u. Donc z est la composante nilpotente de u et hormis le cas $z=0$, $u=z+Id$ n'est pas diagonalisable (corollaire V.22).

9. Non :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \cancel{1} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

10. Non : il s'agit d'une forme de Jordan et la présence du 1 hors de la diagonale interdit de rêver à une diagonalisation.

1 EXERCICE

Si g est inversible, l'application du théorème d'Hamilton-Cayley (V.7) au calcul de l'inverse montre que $g^{-1} = P(g)$ avec $P \in K[X]$. Comme $g = Q(f)$ avec $Q \in K[X]$, alors $g^{-1} = P(Q(g))$ et $g^{-1} \in K[f]$.

2° EXERCICE

On peut remarquer en guise de préambule que l'application linéaire :

$$\begin{aligned} K[X] &\longrightarrow K[f] \\ P(X) &\longmapsto P(f) \end{aligned}$$

est surjective et a pour noyau $Ann(f)$. D'où : $K[f] \simeq K[X]/Ann(f)$.

Mais, $K[X]$ et $Ann(f)$ n'étant pas de dimension finie, cela ne nous éclaire guère sur la dimension de $K[f]$…

Notons k le degré de $M_f(X)$ le polynôme minimal de f.

Pour tout $P \in K[X]$, la division euclidienne de P par $M_f(X)$ permet d'écrire :

$P(X) = Q(X)M_f(X) + R(X)$ avec $\deg(R) < k$

$P(f) = Q(f)\underbrace{M_f(f)}_{=0} + R(f) = R(f)$ avec $\deg(R) < k$

Donc $P(f) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i f^i$. Autrement dit, $\left(1, f, \cdots, f^{k-1}\right)$ est une liste génératrice de $K[f]$.

Reste à ,établir sa liberté :

S'il existait des scalaires $b_{0,}\ b_1, \cdots, b_{k-1}$ non tous nuls tels que : $\sum_{i=0}^{k-1} b_i f^i = 0$, alors le polynôme de degré $\leq k-1$ $\sum_{i=0}^{k-1} b_i X^i$ appartiendrait à $Ann(f)$ en contradiction avec la définition même du polynôme minimal.

3° EXERCICE

1° Question

En choisissant une base de E_1 et une base de E_2 :

$$M(f_1 \oplus f_2) = \left(\begin{array}{c|c} M(f_1) & 0 \\ \hline 0 & M(f_1) \end{array}\right)$$ (cf. proposition I.43)

Donc :

$$C_{f_1\oplus f_2}(l)=\left|\begin{array}{c|c} M(f_1)-l\,I & 0 \\ \hline 0 & M(f_1)-l\,I \end{array}\right| = Det(M(f_1)-l\,I)Det(M(f_2)-l\,I)$$

$$= C_{f_1}(l)C_{f_2}(l)$$

2° Question

$P(f_1 \oplus f_2)=\sum_{i=0}^{k} p_i(f_1 \oplus f_2)^i$. Or, selon la proposition I.42,

$$(f_1 \oplus f_2)^i = f_1^{\,i} \oplus f_2^{\,i}.$$

Donc :

$$P(f_1 \oplus f_2)(v)=\sum_{i=0}^{k} p_i(f_1^{\,i} \oplus f_2^{\,i})(v_1+v_2)=\sum_{i=0}^{k} p_i(f_1^{\,i}(v_1)+f_2^{\,i}(v_2))$$

$$=\sum_{i=0}^{k} p_i f_1^{\,i}(v_1)+\sum_{i=0}^{k} p_i f_2^{\,i}(v_2)=P(f_1)(v_1)+P(f_2)(v_2)$$

3° Question

$$P\in Ann(f_1 \oplus f_2) \Leftrightarrow P(f_1 \oplus f_2)=0 \Leftrightarrow \forall v\in E_1\oplus E_2 : P(f_1 \oplus f_2)(v)=0$$

$$\Leftrightarrow \forall v_1\in E_1, \forall v_2 \in E_2 : P(f_1 \oplus f_2)(v_1+v_2)=0$$

$$\Leftrightarrow \forall v_1\in E_1, \forall v_2 \in E_2 : \underbrace{P(f_1)(v_1)}_{\in E_1}+\underbrace{P(f_2)(v_2)}_{\in E_2}=0$$

et comme E_1 et E_2 sont en somme directe:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall v_1\in E_1 : P(f_1)(v_1)=0 \\ \forall v_2\in E_2 : P(f_2)(v_2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(f_1)=0 \\ P(f_2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P\in Ann(f_1) \\ P\in Ann(f_2) \end{cases}$$

ce qui établit :

$$Ann(f_1 \oplus f_2) = Ann(f_1) \cap Ann(f_2)$$

Donc le générateur de $Ann(f_1 \oplus f_2)$ $M_{f_1\oplus f_2}(X)$ est le plus petit multiple de $M_{f_1}(X)$ et de $M_{f_2}(X)$ autrement dit leur PPCM.

Rappel : Si I et J sont deux idéaux de $K[X]$ *engendrés par respectivement par les polynômes P et Q, le générateur de* $I \cap J$ *est par définition le PPCM de P et Q.*

4° EXERCICE

$C_M(X)=(X-2)(X-1)^3$.

Les valeurs propres sont donc 2 simple et 1 de multiplicité 3.

Sous-espaces propres :

$$E_2 = Vec\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right) \quad E_1 = Vec\left(\begin{pmatrix}2\\3\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

M n'est donc pas diagonalisable.

Sous-espaces caractéristiques :

$$N_2 = E_2 = Vec\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$N_1 = Ker\left((M-I)^3\right)$

$$(M-I)^3 = \begin{pmatrix}-1 & 0 & -1 & 2\\ -1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

manifestement de rang 1, donc $Ker\left((M-I)^3\right)$ est de dimension 3 égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre comme prévu par le théorème V.14.

$$(M-I)^3\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x-z+2t=0$$

Comme base de $N_1 = Ker\left((M-I)^3\right)$ on peut citer :

$$\left(\begin{pmatrix}2\\3\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$$

5° EXERCICE

1° Question

$C_A(X) = -(X-1)^2(X-6)$ et $Spec(A) = \{6\,;1\}$

$E_6 = Vec(u)$ avec $u\begin{pmatrix}3\\2\\8\end{pmatrix}$ $E_1 = Vec(v)$ avec $v\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ La dimension de E_1 étant inférieure à l'ordre de multiplicité de la valeur propre, A n'est pas diagonalisable et son polynôme minimal est égal au signe près à son polynôme caractéristique.

2° Question

$N_6 = Ker(A-6I) = E_6$

$N_1 = Ker(A-I)^2$

$(A-I)^2 = \begin{pmatrix}3 & 9 & 6\\2 & 6 & 4\\8 & 24 & 16\end{pmatrix}$ est manifestement et comme prévu de rang 1.

$(A-I)^2 X = 0 \Leftrightarrow x+3y+2z=0$.

Comme base de N_1 on peut prendre v et $v'\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$.

3° Question

La seule forme (à l'ordre des valeurs propres près) pour la matrice de Jordan semblable à A est : $\begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Pour déterminer la base de Jordan correspondante, il faut donc trois vecteurs u, v, w libres et vérifiant $f(u)=6u$, $f(v)=v$, $f(w)=v+w$. Les vecteurs u et v ayant déjà été déterminés à la 1° question, il reste à déterminer w en résolvant :

$(A-I)W = V \Leftrightarrow \begin{cases}-x+y+2z=1\\2x+2y=-1\\4y+4z=1\end{cases}$. Le vecteur w de coordonnées

$W = \begin{pmatrix}-1/2\\0\\1/4\end{pmatrix}$ est une solution possible. Mais attention ici, $4W$ ne l'est pas !

6° EXERCICE

1° Question

$C_B(X) = -(X+1)(X-I)^2$ et $Spec(B) = \{-1\,;I\}$

$E_{-1} = Vec(u)$ avec $u\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$ $E_i = Vec(v)$ avec $v\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ La dimension de E_i étant inférieure à l'ordre de multiplicité de la valeur propre, B n'est pas diagonalisable et son polynôme minimal est égal au signe près à son polynôme caractéristique.

2° Question

$N_{-1} = Ker(B+I) = E_{-1}$

$N_i = Ker(B-iI)^2$

$(B-iI)^2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & -6i\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 2i\end{pmatrix}$ est manifestement et comme prévu de rang 1.

$(B-I)^2 X = 0 \Leftrightarrow z = 0$. Comme base de N_1 on peut prendre v et $v'\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

3° Question

La seule forme (à l'ordre des valeurs propres près) pour la matrice de Jordan semblable à B est : $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & i & 1\\0 & 0 & i\end{pmatrix}$. Pour déterminer la base de Jordan correspondante, il faut donc trois vecteurs u, v, w libres et vérifiant $f(u) = -u$, $f(v) = iv$, $f(w) = v + iw$. Les vecteurs u et v ayant déjà été déterminés à la 1° question, il reste à déterminer w en résolvant : $(B-iI)W = V \Leftrightarrow \begin{cases}-x-y+3iz=1\\x+y+3z=-1\\-(1+i)z=0\end{cases}$. Le vecteur w de coordonnées $W = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$ est une solution possible.

7° EXERCICE

1° Question

$C_C(X) = X(X-1)^3$ et $Spec(C) = \{0;1\}$

$E_0 = Vec(u)$ avec $u\begin{pmatrix}-1\\3\\-3\\1\end{pmatrix}$ $E_1 = Vec(v)$ avec $v\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\1\end{pmatrix}$ La dimension de E_1 étant inférieure à l'ordre de multiplicité de la valeur propre, C n'est pas diagonalisable et son polynôme minimal peut être $X(X-1)^2$ ou $X(X-1)^3$.

2° Question

$N_0 = Ker(C) = E_0$

$N_1 = Ker(C-I)^3$

$(C-I)^3 = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\3 & 0 & 0 & 0\\-3 & 0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ est manifestement et comme prévu de rang 1.

$(C-I)^3 X = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Comme base de N_1 on peut prendre v, $v'\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $v''\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$

3° Question

Les formes (à l'ordre des valeurs propres près) pour la matrice de Jordan semblable à C sont : $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

La deuxième forme est à éliminer car elle témoignerait d'un deuxième vecteur propre indépendant de v associé à la valeur propre 1.

Pour déterminer la base de Jordan correspondant à la première forme, il faut donc quatre vecteurs u, v, v_1, v_2 libres et vérifiant $f(u) = 0,\ f(v) = v,\ f(v_1) = v + v_1,\ f(v_2) = v_1 + v_2$. Les vecteurs u et v ayant déjà été déterminés à la 1° question, il reste à déterminer v_1 en résolvant :

$(C-I)V_1 = V \Leftrightarrow \begin{cases} -x = 0 \\ -y+t \quad = 1 \\ y-z-3t = -2 \\ z+2t = 1 \end{cases}$. Le vecteur v_1 de coordonnées $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une solution possible.

Puis v_2 en résolvant :

$(C-I)V_2 = V_1 \Leftrightarrow \begin{cases} -x = 0 \\ -y+t \quad = -2 \\ y-z-3t = 3 \\ z+2t = -1 \end{cases}$. Le vecteur v_2 de coordonnées $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une solution possible.

8° EXERCICE

Comme f et z commutent, pour tout entier $k > 0$:

$f^k - z^k = \left(f^{k-1} + f^{k-2} z + \cdots + f z^{k-2} + z^{k-1} \right)(f - z)$

Si k est l'ordre de nilpotence de z :

$f^k = \left(f^{k-1} + f^{k-2} z + \cdots + f z^{k-2} + z^{k-1} \right)(f - z)$

Or f étant inversible, f^k l'est aussi et l'égalité précédente impose $f - g$ inversible (cf. exercice 0.10).

9° EXERCICE

1° Question

Soit z_1 d'ordre de nilpotence k_1 e t z_1 d'ordre de nilpotence k_2 avec $k_1 \leq k_2$. Comme z_1 et z_2 commutent, on peut appliquer la formule du binôme :

$$\left(z_1 + z_2\right)^{2k_2} = \sum_{i=0}^{2k_2} C_{2k_2}^i z_1^i z_2^{2k_2 - i}$$

Si $i \geq k_1$, alors $z_1^i = 0$, sinon $2k_2 - i \geq k_2$ et $z_2^{2k_2 - i} = 0$.

2° Question

Soit f et z nilpotente d'ordre k. S'ils commutent :

$(fz)^k = f^k z^k = 0$.

10° EXERCICE

1° Question

En utilisant la décomposition de Jordan de A :

$$A = P\begin{pmatrix} l_1 & * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_2 & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & l_n \end{pmatrix} P^{-1}$$ (les * représentant des termes quelconques)

$$A^k = P\begin{pmatrix} l_1^k & * & * & \cdots & * \\ 0 & l_2^k & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & * \\ \vdots & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & l_n^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

Donc $Tr(A^k) = l_1^k + \cdots + l_n^k$.

2° Question

Une matrice nilpotente ayant 0 comme seule valeur propre est de trace nulle. Par ailleurs si A est nilpotente A^k l'est aussi. Donc pour entier $k > 0$, $Tr(A^k) = 0$.

On peut par ailleurs rappeler que l'ordre de nilpotence étant inférieur ou égal à n, $A^k = 0$ dès que $k > n$.

3° Question

Si A possède p $(1 \leq p \leq n)$ valeurs propres distinctes : $l_1, \cdots, l_p$ de multiplicités respectives $a_1, \cdots, a_p$, alors $Tr(A^k) = a_1 l_1^k + \cdots + a_p l_p^k$.

Si $Tr(A^k) = 0$, pour $k = 1 \cdots n$, alors :

$$\begin{cases} a_1 l_1 + \cdots + a_p l_p = 0 \\ a_1 l_1^2 + \cdots + a_p l_p^2 = 0 \\ \\ a_1 l_1^n + \cdots + a_p l_p^n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a_1 l_1 \begin{pmatrix} 1 \\ l_1 \\ \vdots \\ l_1^{n-1} \end{pmatrix} + \cdots + a_p l_p \begin{pmatrix} 1 \\ l_p \\ \vdots \\ l_p^{n-1} \end{pmatrix} = 0 \quad (1)$$

La liste $\left(\begin{pmatrix}1\\l_1\\\vdots\\l_1^{n-1}\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}1\\l_p\\\vdots\\l_p^{n-1}\end{pmatrix}\right)$ peut être considérée comme extraite de la liste :

$$\left(\begin{pmatrix}1\\l_1\\\vdots\\l_1^{n-1}\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}1\\l_p\\\vdots\\l_p^{n-1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\l_{p+1}\\\vdots\\l_{p+1}^{n-1}\end{pmatrix},\cdots\begin{pmatrix}1\\l_n\\\vdots\\l_n^{n-1}\end{pmatrix}\right),$$

les scalaires $l_{p+1},\cdots,l_n$ « rajoutés » étant distincts entre eux et distincts des p premiers.

Or le déterminant de cette liste est un déterminant de Vandermonde (voir l'entracte consécutif à la proposition II.20) non nul puisque les l_i sont distincts.

La liste $\left(\begin{pmatrix}1\\l_1\\\vdots\\l_1^{n-1}\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}1\\l_p\\\vdots\\l_p^{n-1}\end{pmatrix}\right)$ étant extraite d'une liste libre est libre.

L'équation (1) impose alors : $a_1 l_1 = \cdots = a_p l_p = 0$. Comme les a_i sont strictement positifs, la seule issue est : $p = 1$ et $l_1 = 0$.

0 est donc la seule valeur propre de A dont la forme réduite de Jordan est strictement triangulaire supérieure. La proposition V.18 permet alors de conclure à la nilpotence de A.

11° PROBLÈME

1° Question

Pour $k > 0$, une récurrence permet d'établir : $\exp(kA) = \exp(A)^k$.

Pour $k = 0$: $\exp(A+0) = \exp(A)\exp(0) \Rightarrow \exp(A) = I$, puisque $\exp(A)$ inversible.

Pour $k < 0$:

$$\exp(kA - kA) = I \Rightarrow \exp(kA)\exp(-kA) = I \Rightarrow \exp(kA) = \left(\exp(-kA)\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow \exp(kA) = \left(\exp(A)^{-k}\right)^{-1} \Rightarrow \exp(kA) = \exp(A)^k$$

2° Question

On peut remarquer que, selon cette définition, $\exp(A)$ est inversible puisque $e^{l_i} \neq 0$.

Soit A et B diagonalisables et commutantes, le lemme V.20 assure l'existence d'une base propre commune et donc, il existe une matrice de changement de base P telle que :

$$A = PDiag(l_1, \cdots, l_n)P^{-1}$$

$$B = PDiag(m_1, \cdots, m_n)P^{-1}$$

D'où :

$$A + B = PDiag(l_1 + m_1, \cdots, l_n + m_n)P^{-1}$$

$A + B$ est donc diagonalisable et de plus :

$$\begin{aligned}\exp(A+B) &= PDiag\left(e^{l_1+m_1}, \cdots, e^{l_n+m_n}\right)P^{-1} = PDiag\left(e^{l_1}e^{m_1}, \cdots, e^{l_n}e^{m_n}\right)P^{-1} \\ &= PDiag\left(e^{l_1}, \cdots, e^{l_n}\right)P^{-1}PDiag\left(e^{m_1}, \cdots, e^{m_n}\right)P^{-1} \\ &= \exp(A)\exp(B)\end{aligned}$$

Appartenance de $\exp(A)$ *à* $\mathbb{C}[A]$

Soit $A = PDiag(l_1, \cdots, l_n)P^{-1}$. Il existe un polynôme $Q = \sum_{j=0}^{k} q_j X^j \in \mathbb{C}[X]$ tel que, pour $i = 1 \cdots n$, $e^{l_i} = Q(l_i)$ (cf. problème 0.12 sur l'interpolation de Lagrange). Il en résulte que :

$$\begin{aligned}\exp(A) &= PDiag\left(e^{l_1}, \cdots, e^{l_n}\right)P^{-1} = PDiag\left(\sum_{j=0}^{k} q_j l_1^j, \cdots, \sum_{j=0}^{k} q_j l_n^j\right)P^{-1} \\ &= P\left(\sum_{j=0}^{k} q_j \left(Diag(l_1, \cdots, l_n)\right)^j\right)P^{-1} \\ &= \sum_{j=0}^{k} q_j \underbrace{P\left(Diag(l_1, \cdots, l_n)\right)^j P^{-1}}_{=A^j} \\ &= \sum_{j=0}^{k} q_j A^j = Q(A)\end{aligned}$$

Et donc $\exp(A) \in \mathbb{C}[A]$.

3° Question

Remarque : A est nilpotente d'ordre n au plus. Pour cette raison, la sommation servant à définir $\exp(A)$ s'arrête à $n-1$.

Si A et B nilpotentes commutent, l'exercice V.9 montre que $A+B$ est aussi nilpotente.

Pour $i=0\cdots n-1,\ j=0\cdots n-1$, considérons les matrices : $\frac{1}{i!}\frac{1}{j!}A^iB^j$, matrices que l'on peut imaginer rangées dans un tableau :

$$\begin{array}{cccccc}
I & B & \cdots & \frac{1}{j!}B^j & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}B^{n-1} \\
A & AB & & & & \\
\vdots & & & & & \\
\frac{1}{i!}A^i & & & \frac{1}{i!}\frac{1}{j!}A^iB^j & & \\
\vdots & & & & & \\
\frac{1}{(n-1)!}A^{n-1} & & & & & \left(\frac{1}{(n-1)!}\right)^2 A^{n-1}B^{n-1}
\end{array}$$

Soit S, la somme des termes de ce tableau :

$$S=\sum_{i=0,\,j=0}^{i=n-1,\,j=n-1}\frac{1}{i!}\frac{1}{j!}A^iB^j=\sum_{i=0}^{i=n-1}\frac{1}{i!}A^i\sum_{j=0}^{j=n-1}\frac{1}{j!}B^j=\exp(A)\exp(B)$$

Mais A et B sont nilpotentes d'ordre n au plus, tous les termes du tableau au dessous de la ligne $n-1$ ou à droite de la colonne $n-1$ sont nuls. On peut opérer la sommation en diagonale et écrire :

$$S=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i+j=k}\frac{1}{i!}\frac{1}{j!}A^iB^j=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\sum_{i+j=k}\frac{k!}{i!\,j!}A^iB^j=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\sum_{i+j=k}C_k^iA^iB^j$$

A et B commutant, l'usage de la formule du binôme est légitime :

$$S=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}(A+B)^k=\exp(A+B).$$

Et finalement : $\exp(A+B)=\exp(A)\exp(B)$.

Il reste à justifier l'inversibilité de $\exp(A)$ telle qu'elle est définie. À cette fin, on peut remarquer que $\exp(A)$ est de la forme une matrice inversible (I) plus une matrice nilpotente commutant avec la première et appliquer l'exercice V.8.

4° Question

Une matrice « quelconque » A possède une décomposition de Dunford unique : $A=D+Z$, D diagonalisable, Z nilpotente commutant entre elles. Ce qui permet de définir :

$$\exp(A)=\underbrace{\exp(D)}_{\text{selon 2°}}\underbrace{\exp(Z)}_{\text{selon 3°}}$$

D'après la 2° question $\exp(D) \in \mathbb{C}[D]$. Comme Z commute avec D, Z commute aussi avec $\exp(D)$. De par sa définition même $\exp(Z) \in \mathbb{C}[Z]$ et donc $\exp(D)$ et $\exp(Z)$ commutent. On peut donc compléter la définition par :

$$\exp(A) = \exp(D)\exp(Z) = \exp(Z)\exp(D)$$

Soit B commutant avec A décomposée de façon analogue $B = D' + Z'$. Alors :

$$\exp(A)\exp(B) = \exp(D)\exp(Z)\exp(D')\exp(Z')$$

D'après le théorème V.21, $D, Z \in \mathbb{C}[A]$, $D', Z' \in \mathbb{C}[B]$. Comme A et B commutent il en est de même de D, Z, D', Z' et aussi de $\exp(D), \exp(Z), \exp(D'), \exp(Z')$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}\exp(A)\exp(B) &= \exp(D)\exp(D')\exp(Z)\exp(Z') \\ &= \exp(D+D')\exp(Z+Z')\end{aligned}.$$

Sur l'autre versant :

$$A + B = D + D' + Z + Z'$$

Comme D et D' commutent, elles ont une base propre commune et (lemme V.20) $D + D'$ est diagonalisable.
Comme Z et Z' commutent (exercice V.9), $Z + Z'$ est nilpotente.
Comme D, Z, D', Z' commutent, $D + D'$ et $Z + Z'$ aussi. Autrement dit, nous tenons là la décomposition de Dunford de $A + B$.
Par suite :

$$\exp(A + B) = \exp(D + D')\exp(Z + Z') = \exp(A)\exp(B)$$

12° PROBLÈME

1° Question

$$C_f(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{p} (X - l_l)^{a_i}$$

$$C'_f(X) = (-1)^n \sum_{j=1}^{p} a_j (X - l_j)^{a_j - 1} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{p} (X - l_l)^{a_i}$$

Les facteurs irréductibles communs à $C_f(X)$ et $C'_f(X)$ sont les $(X - l_j)^{a_j - 1}$ pour $j = 1 \cdots p$. Comme ils sont premiers deux à deux, le PGCD de $C_f(X)$ et $C'_f(X)$ est :

$$G(X) = \prod_{j=1}^{p} (X - l_j)^{a_j - 1}$$

Et $P(X)G(X)=\prod_{j=1}^{p}(X-l_j)\ \prod_{j=1}^{p}(X-l_j)^{a_j-1}=\prod_{j=1}^{p}(X-l_j)^{a_j}=C_f(X)$

2° Question

$$P(X)=\prod_{j=1}^{p}(X-l_j)$$

$$P'(X)=\sum_{j=1}^{p}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{p}(X-l_i)\quad C_f(X)=(-1)^n\prod_{i=1}^{p}(X-l_l)^{a_i}$$

Aucune de ses racines $l_1,\cdots,l_p$ de $C_f(X)$ n'annule $P'(X)$ qui n'a donc aucun facteur commun avec $C_f(X)$.

$C_f(X)$ et $P'(X)$ étant premiers entre eux, l'identité de Bezout assure l'existence de deux polynômes Q et R tels que :

$$Q(X)P'(X)+R(X)C_f(X)=1$$

Et en substituant à X l'endomorphisme f :

$$Q(f)P'(f)+R(f)\underbrace{C_f(f)}_{=0}=Id$$

$$Q(f)P'(f)=Id$$

L'inversibilité de $P'(f)$ est établie.

3° Question

a) La vérification de $\mathcal{H}_0$ est immédiate : le seul point non trivial est réglé par la question précédente.

b) On suppose $\mathcal{H}_k$ vraie.

i) $f_{k+1}=f_k-P(f_k)\left(P'(f_k)\right)^{-1}$. D'après $\mathcal{H}_k$, $f_k\in\mathbb{C}[f]$, donc $P(f_k)$ et $P'(f_k)$ aussi et selon l'exercice V.1 $\left(P'(f_k)\right)^{-1}$ appartient à $\mathbb{C}[f]$. Donc f_{k+1} appartient à $\mathbb{C}[f]$. La première assertion de $\mathcal{H}_{k+1}$ est établie.

ii) Soit $Q(X)=\sum_{i=0}^{k} q_i X^i \in \mathbb{C}[X]$.

$$Q(X+Y)=\sum_{i=0}^{k} q_i (X+Y)^i=\sum_{i=0}^{k} q_i\left(X^i+iX^{i-1}Y+Y^2(\cdots)\right)$$

$$=\sum_{i=0}^{k} q_i X^i+Y\sum_{i=0}^{k} iq_i X^{i-1}+Y^2\underbrace{\sum_{i=0}^{k}(\cdots)}_{=T(X,Y)}$$

$$=Q(X)+YQ'(X)+Y^2T(X,Y)$$

(On peut aussi déduire ce résultat de la formule de Taylor à l'ordre 2)

$$P(f_{k+1})=P\left(\underbrace{f_k}_{X}\underbrace{-P(f_k)\left(P'(f_k)\right)^{-1}}_{Y}\right)$$

Par application de la formule précédente :

$$P(f_{k+1})=P(f_k)-P(f_k)\underbrace{\left(P'(f_k)\right)^{-1}P'(f_k)}_{=Id}$$

$$+\left(P(f_k)\left(P'(f_k)\right)^{-1}\right)^2 T\left(f_k,P(f_k)\left(P'(f_k)\right)^{-1}\right)$$

Nous avons déjà vu que f_k, $P(f_k)$, $\left(P'(f_k)\right)^{-1}$ sont des polynômes de f et

$\left(\left(P'(f_k)\right)^{-1}\right)^2 T\left(f_k,P(f_k)\left(P'(f_k)\right)^{-1}\right)$ est donc lui aussi un polynôme de f que l'on notera plus sobrement $V(f)$.

On obtient : $P(f_{k+1})=\left(P(f_k)\right)^2 V(f)$.

En appliquant le deuxième assertion de $\mathcal{H}_k$:

$$P(f_{k+1})=\left(P(f)^{2^k}R(f)\right)^2 V(f)=P(f)^{2^{k+1}}\underbrace{R(f)^2V(f)}_{\in\mathbb{C}(f)}$$

Ce qui établit la deuxième assertion de $\mathcal{H}_{k+1}$.

iii)

$$Q(X)-Q(Y)=\sum_{i=0}^{k} q_i X^i-\sum_{i=0}^{k} q_i Y^i=\sum_{i=1}^{k} q_i(X^i-Y^i)=(X-Y)\underbrace{\sum_{i=1}^{k} q_i(\cdots)}_{U(X,Y)}$$

iv) En appliquant ce résultat à $P'(f_{k+1})-P'(f_k)$:

$P'(f_{k+1})-P'(f_k)=(f_{k+1}-f_k)U(f_{k+1},f_k)$

Or $f_{k+1} - f_k = -P(f_k)\left(P'(f_k)\right)^{-1}$ et d'autre part f_{k+1}, f_k étant des polynômes en *f*, $U(f_{k+1}, f_k)$ aussi. En le notant $S(f)$, on obtient :

$$P'(f_{k+1}) - P'(f_k) = -P(f_k)\left(P'(f_k)\right)^{-1} S(f)$$

v) De par sa définition $P(X)^n$ est un multiple de $C_f(X)$. Comme $C_f(f) = 0$, $P(f)^n = 0$ et $P(f)$ est nilpotente.

Le produit d'un endomorphisme nilpotent par un endomorphisme avec lequel il commute est nilpotent (cf. exercice V.9).

Donc : $P(f_k) = P(f)^{2^k} R(f)$ est nilpotente et $-P(f_k)\left(P'(f_k)\right)^{-1} S(f)$ aussi (tous ces endomorphismes appartenant à $\mathbb{C}[f]$ ont le bon goût de commuter). Donc :

$$P'(f_{k+1}) = \underbrace{P'(f_k)}_{inversible} - \underbrace{P(f_k)\left(P'(f_k)\right)^{-1} S(f)}_{nilpotent}$$

et selon l'exercice V.8 $P'(f_{k+1})$ est inversible. La troisième assertion de $\mathcal{H}_{k+1}$ est établie.

4° Question

Comme $P(f_k) = P(f)^{2^k} R(f)$ et que, ainsi que nous l'avons déjà vu $P(f)$ est nilpotente, il va exister un rang k_0 tel que $P(f)^{2^{k_0}} = 0$. Donc telle que $P(f_{k_0}) = 0$. Comme l'ordre de nilpotence est inférieure ou égale à la dimension de l'espace $2^{k_0} \leq n$. Et à partir de ce rang, donc effectivement « vite » atteint, la suite f_k est stationnaire.

Comme $P(f_{k_0}) = 0$, $P \in Ann(f_{k_0})$ et P n'ayant que des racines simples, le corollaire V.12 assure que f_{k_0} est diagonalisable.

Par ailleurs $f - f_{k_0} = \sum_{k=0}^{k_0-1} (f_k - f_{k+1})$ et selon les formules $f_{k+1} - f_k = -P(f_k)\left(P'(f_k)\right)^{-1}$ et $P(f_k) = P(f)^{2^k} R(f)$, on en déduit que :

$$f - f_{k_0} = P(f)H(f)$$

Il s'en suit que $f - f_{k_0}$ est nilpotente.

On a alors $f = \underbrace{f_{k_0}}_{diagonalisable} + \underbrace{(f - f_{k_0})}_{nilpotente}$. Les deux termes de cette décomposition sont des polynômes de *f* et commutent. Il s'agit bien de la décomposition de Dunford de *f*.

CHAPITRE VI

PETITES QUESTIONS POUR FAIRE LE POINT

1. Le rang de A est 3. A^* est de taille 4×3, A^*A de taille 4×4, AA^* de taille 3×3. Selon le corollaire VI.5, toutes ses matrices sont de rang 3.

2. La matrice M doit être de taille 3×3. Selon la proposition VI.17, $Ker(M)$ et $Im(M)$ sont des supplémentaires orthogonaux. Par conséquent :

$$Im(M)=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in\mathbb{C}^3 \;\; / x+2y+3z=0\right\}$$

3. $y\in Im(f)$. Donc, toujours selon la proposition VI.17, $x\perp y$.

4. A étant normal, $AA^*=A^*A$ et :
$(A+I)(A+I)^*=AA^*+A+A^*+I=A^*A+A+A^*+I=(A+I)^*(A+I)$

5. Non, sauf si elles commutent. Exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6. $A^*=-A\Rightarrow\forall i=1\cdots n:\bar{a}_{i,i}=-a_{i,i}\Rightarrow \mathrm{Re}(a_{i,j})=0$.

7. $(UP)^*UP=P^*\underbrace{U^*U}_{=I}P=P^2=P$

8. Oui. A unitaire et hermitienne équivaut à: $A^*=A=A^{-1}$. A est la matrice d'une symétrie orthogonale (voir schéma suite à la proposition VI.29).

9. Soit $M=QR$, alors :

$$M^*M=R^*\underbrace{Q^*Q}_{=I}R=R^*R$$

Si R matrice diagonale, R^*R est une matrice diagonale réelle.

10.

- ✓ *A* non : -1 est valeur propre.
- ✓ *B* est semi définie positive : ses valeurs propres sont positives ou nulles.
- ✓ *C* est définie positive : ses valeurs propres sont strictement positives.
- ✓ *D* n'est pas hermitienne !

11. Oui : Si *A* est définie positive, toutes ses valeurs propres sont strictement positives. Les valeurs propres de A^k sont les puissances $k^{\text{ième}}$ des valeurs propres de *A* sont aussi strictement positives. Et comme A^k est hermitienne…
On peut aussi montrer que :

$$\forall X \in \mathbb{C}^n - \{0\} : X * AX > 0 \Rightarrow \forall X \in \mathbb{C}^n - \{0\} : X * A^k X > 0$$

12. Non, sauf si elle est nulle. Une matrice hermitienne est toujours diagonalisable, une matrice nilpotente non nulle jamais.

13. Si $X \in \mathbb{C}^n$, $X * X = \|X\|_2^2 \in \mathbb{R}_+$. La valeur singulière de X est $\|X\|_2$.

1° EXERCICE

1° Question

$H-iI$ est inversible, car sinon i serait valeur propre de H en contradiction avec le théorème spectral (VI.21).

2° Question

$U=(H+iI)(H-iI)^{-1}$

$U^*=\left((H-iI)^{-1}\right)^*(H+iI)^*$

Tenant compte de $H^*=H$ et $(iI)^*=-iI$:

$U^*=\left((H-iI)\right)^{*-1}(H-iI)=(H+iI)^{-1}(H-iI)$.

Donc :

$U^*U=(H+iI)^{-1}\underbrace{(H-iI)(H+iI)}_{\text{commutent}}(H-iI)^{-1}=I$.

U est bien unitaire.

2° EXERCICE

A est hermitienne, donc à valeurs propres réelles et diagonalisable dans une base propre orthonormale.

$$C_A(l)=\begin{vmatrix}1-l & \bar{a} & 0\\ a & 1-l & \bar{b}\\ 0 & b & 1-l\end{vmatrix}=(1-l)\left((1-l)^2-\underbrace{b\bar{b}}_{=2}\right)-\underbrace{a\bar{a}}_{=2}(1-l)$$

$$=(1-l)(l+1)(l-3)$$

$Spec(A)=\{-1,1,3\}$

$$E_{-1}:\begin{cases}2x+\bar{a}y=0\\ ax+2y+\bar{b}z=0\\ by+2z=0\end{cases}\qquad u\begin{pmatrix}\bar{a}\\ -2\\ b\end{pmatrix}$$

$$E_1:\begin{cases}\bar{a}y=0\\ ax+\bar{b}z=0\\ by=0\end{cases}\qquad v\begin{pmatrix}\bar{b}\\ 0\\ -a\end{pmatrix}$$

$$E_{-1}:\begin{cases}-2x+\bar{a}y=0\\ ax-2y+\bar{b}z=0\\ by-2z=0\end{cases}\qquad w\begin{pmatrix}\bar{a}\\ 2\\ b\end{pmatrix}$$

Vérification de l'orthogonalité de (u,v,w) :

$\langle u;v\rangle=\bar{a}b-b\bar{a}=0$; $\langle u;w\rangle=\bar{a}a-4+b\bar{b}=0$; $\langle v;w\rangle=\bar{b}a-a\bar{b}=0$.

En revanche, la normalité est en défaut :
$\|u\| = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3}$; $\|v\| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$; $\|w\| = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3}$

Mais alors $\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}u, \frac{1}{2\sqrt{2}}v, \frac{1}{2\sqrt{3}}w\right)$ est une base orthonormale.

3° EXERCICE

B est hermitienne, donc à valeurs propres réelles et diagonalisable dans une base propre orthonormale.

$$C_B(l) = \begin{vmatrix} 1-l & 0 & u \\ 0 & 1-l & \sqrt{3}\bar{u} \\ \bar{u} & \sqrt{3}u & 1-l \end{vmatrix} = (1-l)\left((1-l)^2 - 3\right) - (1-l)$$

$$= (1-l)(l+1)(l-3)$$

$Spec(B) = \{-1, 1, 3\}$

$$E_{-1} : \begin{cases} 2x + \quad + uz = 0 \\ 2y + \sqrt{3}uz = 0 \\ \bar{u}x + \sqrt{3}\bar{u}y + 2z = 0 \end{cases} \qquad x_1 \begin{pmatrix} u \\ \sqrt{3}u \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$E_1 : \begin{cases} uz = 0 \\ \sqrt{3}uz = 0 \\ \bar{u}x + \sqrt{3}\bar{u}y \quad = 0 \end{cases} \qquad x_2 \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_3 : \begin{cases} -2x + \quad + uz = 0 \\ -2y + \sqrt{3}uz = 0 \\ \bar{u}x + \sqrt{3}\bar{u}y - 2z = 0 \end{cases} \qquad x_3 \begin{pmatrix} u \\ \sqrt{3}u \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vérification de l'orthogonalité de (u, v, w) :

$\langle x_1 ; x_2 \rangle = u\sqrt{3} - u\sqrt{3} = 0$; $\langle x_1 ; x_3 \rangle = u\bar{u} + u\sqrt{3}\bar{u}\sqrt{3} - 4 = 0$; $\langle x_2 ; x_3 \rangle = \sqrt{3}u - u\sqrt{3} = 0$

.

En revanche, la normalité est en défaut :
$\|x_1\| = \sqrt{1+3+4} = 2\sqrt{2}$; $\|x_2\| = \sqrt{3+1} = 2$; $\|w\| = \sqrt{1+3+4} = 2\sqrt{2}$

Mais alors $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{2\sqrt{2}}x_3\right)$ est une base orthonormale.

4° EXERCICE

En posant $J=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$, $M=aI+bJ$ et tenant compte de $J^*=J$, il vient :

$$M^*M=(\bar{a}I+\bar{b}J)(aI+bJ)=\bar{a}aI+(\bar{a}b+\bar{b}a)J+\bar{b}bJ^2$$

$$MM^*=(aI+bJ)(\bar{a}I+\bar{b}J)=a\bar{a}I+(b\bar{a}+a\bar{b})J+b\bar{b}J^2$$

ce qui confirme la normalité de *M*.

Petite remarque si $b=0$, $M=aI$ et la question est réglée… On supposera dans la suite que $b\neq 0$.

$$C_M(X)=Det(M-XI)=\begin{vmatrix}a-X&0&0&b\\0&a-X&b&0\\0&b&a-X&0\\b&0&0&a-X\end{vmatrix}=$$

$$(a-X)\Big((a-X)\big((a-X)^2-b^2\big)\Big)-b\Big(b\big((a-X)^2-b^2\big)\Big)=$$

$$\big((a-X)^2-b^2\big)^2=(a-b-X)^2(a+b-X)^2$$

$Spec(M)=\{a+b,a-b\}$, les deux valeurs propres, distinctes puisque b est supposé différent de 0, sont d'ordre 2.

Sous espaces propres :

E_{a+b}

$$\big(M-(a+b)I\big)V=0\Leftrightarrow\begin{cases}-bx+bt=0\\-by+bz=0\end{cases}\underset{(\text{car } b\neq 0)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x=t\\y=z\end{cases}.$$

D'où : $E_{a+b}=Vec\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ et $Dim(E_{a+b})=2$

E_{a-b}

$$\big(M-(a-b)I\big)V=0\Leftrightarrow\begin{cases}bx+bt=0\\by+bz=0\end{cases}\underset{(\text{car } b\neq 0)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x=-t\\y=-z\end{cases}.$$

D'où : $E_{a-b} = Vec\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$ et $Dim(E_{a-b}) = 2$

Tous ces vecteurs propres ont pour normes $\sqrt{2}$, il convient donc de les multiplier par $\frac{1}{\sqrt{2}}$ pour obtenir la base propre orthonormale souhaitée.

5° EXERCICE

Méthode laborieuse :

Soit $P(X) = \sum_{i=0}^{k} p_i X^i$

$$P(f)P(f^*) = \sum_{i=0}^{k} p_i f^i \sum_{j=0}^{k} p_j f^{*j} = \sum_{i,j=0}^{k} p_i p_j f^i f^{*j}$$

Par normalité de *f*, $f^*\ f = f\ f^*$ ce permet de commuter dans les $f^i f^{*j}$ et d'obtenir :

$$P(f)P(f^*) = \sum_{i,j=0}^{k} p_i p_j f^{*j}\ f^i = \sum_{j=0}^{k} p_j f^{*j} \sum_{i=0}^{k} p_i f^i = P(f^*)P(f).$$

Méthode rapide basée sur le théorème VI.11 :

f normal $\Leftrightarrow$ il existe une base propre orthonormale.

La proposition V.3 permet d'affirmer que $P(f)$ est diagonalisable dans la même base orthonormale que *f*. $P(f)$ est donc normale.

6° EXERCICE

1° Question

Si p_1 et p_2 commutent :

$(p_1 p_2)^2 = p_1 p_2 p_1 p_2 = p_1 p_1 p_2 p_2 = p_1 p_2$ donc $p_1 p_2$ est une projection.

$(p_1 p_2)^* = p_2^* p_1^* = p_2 p_1 = p_1 p_2$ donc $p_1 p_2$ est une projection orthogonale.

Réciproquement, si $p_1 p_2$ est une projection orthogonale :

$p_1 p_2 = (p_1 p_2)^* = p_2^* p_1^* = p_2 p_1$.

2° Question

Sous l'hypothèse : p_1 et p_2 commutent.

$$y \in Im(p_1 p_2) \Rightarrow \begin{cases} y = p_1 p_2(x) \\ y = p_2 p_1(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \in Im(p_1) \\ y \in Im(p_2) \end{cases}$$

Donc $Im(p_1 p_2) \subseteq Im(p_1) \cap Im(p_2)$.

$$\begin{cases} y \in Im(p_1) \\ y \in Im(p_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = p_1(y) \\ y = p_2(y) \end{cases} \Rightarrow y = p_1 p_2(y) \Rightarrow y \in Im(p_1 p_2)$$

Donc : $Im(p_1 p_2) \supseteq Im(p_1) \cap Im(p_2)$.

$$Im(p_1 p_2) = Im(p_1) \cap Im(p_2)$$

$$x \in Ker(p_1) + Ker(p_2) \Rightarrow x = \underbrace{x_1}_{\in Ker(p_1)} + \underbrace{x_2}_{\in Ker(p_2)} \Rightarrow p_1 p_2(x) = p_1 p_2(x_1) + \underbrace{p_1 p_2(x_2)}_{=0}$$

$$\Rightarrow p_1 p_2(x) = p_2 p_1(x_1) = 0 \Rightarrow x \in Ker(p_1 p_2)$$

Donc : $Ker(p_1) + Ker(p_2) \subseteq Ker(p_1 p_2)$

Soit x décomposé : $x = \underbrace{x_1}_{\in Ker(p_1)} + \underbrace{x_2}_{\in Im(p_1)}$.

$$x \in Ker(p_2 p_1) \Rightarrow p_2 \underbrace{p_1(x_1)}_{=0} + p_2 p_1(x_2) = 0 \Rightarrow p_2 p_1(x_2) = 0 .$$

Comme $x_2 \in Im(p_1)$, $p_1(x_2) = x_2$:

$$x \in Ker(p_2 p_1) \Rightarrow p_2(x_2) = 0 \Rightarrow x_2 \in Ker(p_2) .$$

Finalement : $x = \underbrace{x_1}_{\in Ker(p_1)} + \underbrace{x_2}_{\in Ker(p_2)}$, $x \in Ker(p_1) + Ker(p_2)$.

Donc : $Ker(p_1) + Ker(p_2) \supseteq Ker(p_1 p_2)$

$$Ker(p_1) + Ker(p_2) = Ker(p_1 p_2)$$

Variante de la 2°partie :

On démontre, que pour des sous-espaces A et B : $\left(A \cap B\right)^{\perp} = A^{\perp} + B^{\perp}$ et on applique ce résultat à : $Im(p_1 p_2) = Im(p_1) \cap Im(p_2)$:

$$Im(p_1 p_2)^{\perp} = Im(p_1)^{\perp} + Im(p_2)^{\perp} \Rightarrow Ker(p_1 p_2) = Ker(p_1) + Ker(p_2)$$

7° EXERCICE

1° Question

Soit $v \in E$ tel que : $p_1 p_2(v) = l\,v$ avec $l \neq 0$, alors :

$$p_1 p_1 p_2(v) = l\, p_1(v) \Rightarrow p_1 p_2(v) = l\, p_1(v) \Rightarrow l\,v = l\, p_1(v) \Rightarrow v = p_1(v)$$

Donc $v \in Im(p_1) = V_1$.

$Im(p_1 p_2) \subseteq Im(p_1) = V_1$. Donc la restriction de $p_1 p_2$ à V_1 définit un endomorphisme f_1 de V_1 .

✓ f_1 est autoadjointe :

Comme p_1 et p_2 sont auto-adjointes, pour tout $x, y \in V_1 = Im(p_1)$, il vient :

$$\left\langle f_1(x)\,;\,y\right\rangle = \left\langle p_1p_2(x)\,;\,y\right\rangle = \left\langle p_2(x)\,;p_1(y)\right\rangle = \left\langle p_2(x)\,;\,y\right\rangle = \left\langle x\,;\,p_2(y)\right\rangle$$
$$= \left\langle p_1(x)\,;p_2(y)\right\rangle = \left\langle x\,;\,p_1p_2(y)\right\rangle = \left\langle x\,;\,f_1(y)\right\rangle$$

✓ f_1 est semi-défini positif :

$$\left\langle f_1(x)\,;\,x\right\rangle = \left\langle p_1p_2(x)\,;\,x\right\rangle = \left\langle p_2(x)\,;p_1(x)\right\rangle = \left\langle p_2(x);\,x\right\rangle$$
$$= \left\langle p_2(x)\,;p_2(x) + x - p_2(x)\right\rangle$$

Comme $x - p_2(x) \perp p_2(x)$:

$$\left\langle f_1(x)\,;\,x\right\rangle = \left\langle p_2(x)\,;\,p_2(x)\right\rangle = \left\|p_2(x)\right\|_2^2 \geq 0$$

Comme les vecteurs propres de p_1p_2 correspondant à des valeurs propres non nulles appartiennent à V_1, on en déduit que les valeurs propres de p_1p_2 sont réelles positives ou nulles.
De plus : $\left\|p_1p_2(x)\right\|_2 \leq \left\|p_2(x)\right\|_2 \leq \left\|x\right\|_2$, donc toutes les valeurs propres de p_1p_2 sont inférieures ou égales à 1.

2° Question

Soit $v \in E$ tel que : $p_1p_2(v) = l\,v$ avec $l \neq 0$, alors :
$p_2p_1\left(p_2(v)\right) = l\,p_2(v)$.
Si $p_2(v) = 0$, alors $l\,v = 0$ ce qui contredit $l \neq 0$. Donc $p_2(v)$ est vecteur propre de p_2p_1 associé à l.
Donc route valeur propre non nulle de p_1p_2 est valeur propre de p_2p_1 et réciproquement…
Par ailleurs $Ker(p_2p_1)$ et $Ker(p_1p_2)$ ne sont pas réduits à $\{0\}$. Donc 0 est valeur propre commune à p_1p_2 et p_2p_1.

3° Question

Si $V_1 \cap V_2 \neq \{0\}$, soit $v \in V_1 \cap V_2, v \neq 0$:
$p_1p_2(v) = p_1(v) = v$. 1 est donc valeur propre associé *v*.

Réciproquement, si 1 est valeur propre de p_1p_2 (et donc aussi de p_2p_1 selon la 2° question), il existe $v \in V_1$ non nul tel que : $p_1p_2(v) = v$. Or si $v \notin V_2$, $\left\|p_2(v)\right\|_2 < \left\|v\right\|_2$, ce qui rend impossible $p_1p_2(v) = v$. Donc $v \in V_2$ et $V_1 \cap V_2 \neq \{0\}$.

Sous cette hypothèse, tout $v \in V_1 \cap V_2$ vérifie $p_1 p_2(v) = v$ et $p_2 p_1(v) = v$ et appartient donc à E_1 et à F_1.
Réciproquement, si $v \in E_1$, $p_1 p_2(v) = v$, un raisonnement sur les normes montre que $v \in V_1 \cap V_2$. Il en est de même si $v \in F_1$
En résumé :
$1 \in Spec(p_1 p_2) = Spec(p_2 p_1) \Rightarrow V_1 \cap V_2 = E_1 = F_1$

Soit $v \in E_l$ avec $l \neq 0$:
$p_1 p_2(v) = l\, v \Rightarrow p_2 p_1\left(p_2(v)\right) = l\, p_2(v)$. Donc $p_2(v) \in F_l$.

Comme $l \neq 0$, la première question indique $v \in V_1$ et donc que $p_1(v) = v$. Il en résulte que :
$\left\langle v\,;\, p_2(v)\right\rangle = \left\langle p_1(v)\,;\, p_2(v)\right\rangle = \left\langle v\,;\, p_1 p_2(v)\right\rangle = l\left\langle v\,;\, v\right\rangle = l\,\|v\|_2^2$.
Mais par ailleurs :
$\left\langle v\,;\, p_2(v)\right\rangle = \left\langle p_2(v)\,;\, p_2(v)\right\rangle = \| p_2(v)\|_2^2$.
Donc, si $v \neq 0$, $l = \dfrac{\|p_2(v)\|_2^2}{\|v\|_2^2} = \cos^2(\widehat{v, p_2(v)})$.

8° EXERCICE

1° Question

$f_1 + \cdots + f_k = Id$. Donc, pour tout x de E : $x = f_1(x) + \cdots + f_k(x)$ et $E = E_1 + \cdots + E_k$.

Pour $i = 1 \cdots k$:
Si f_i est autoadjointe, la proposition VI.17 assure que $E_i^{\perp} = N_i$.

Si $x = f_1(x) + \cdots + f_k(x)$ appartient à N_i, $f_i(x) = 0$. Donc :
$x = f_1(x) + \cdots + \widehat{f_i(x)} + f_{i+1}(x) + \cdots + f_k(x)$ appartient à E_i'. Autrement dit : $N_i \subseteq E_i'$.

2° Question

i) $\Rightarrow$ ii)
Si $\sum_{i=1}^{k} Rg(f_i) = n$, alors $\sum_{i=1}^{k} Dim(E_i) = n$ et les E_i sont en somme directe :

$$E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$$

Pour $i = 1 \cdots k$, on a donc : $E = E_i' \oplus E_i$.

Mais par ailleurs $E = N_i \oplus E_i$.
Il en résulte que N_i et E_i' ont même dimensions et l'inclusion $N_i \subseteq E_i'$ se transforme en égalité.
Pour tout x de E, on peut donc écrire : $x = \underbrace{f_i(x)}_{\in E_i} + \underbrace{x'}_{\in E_i' = N_i}$. D'où :

$f_i(x) = f_i^2(x) + \underbrace{f_i(x')}_{=0}$ et $f_i^2 = f_i$.

f_i est donc une projection et même une projection orthogonale puisque auto-adjoint par hypothèse.
Par ailleurs, pour $j \neq i$, et pour tout x de E, $f_i(x) \in E_i \subseteq E_j' = N_j$ et donc $f_j f_i(x) = 0$.

ii) $\Rightarrow$ i)

Si $f_i f_j = \begin{cases} f_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, les f_i sont des projections orthogonales.

Soit :

$0 = \sum_{i=1}^{k} x_i$ avec pour $i = 1 \cdots k, x_i \in E_i$. Comme $f_i(x_i) = x_i$: $0 = \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i)$.

Pour $j = 1 \cdots k$, on obtient donc :

$0 = \sum_{i=1}^{k} f_j f_i(x_i) \Rightarrow f_j f_j(x_j) = 0 \Rightarrow f_j(x_j) = 0 \Rightarrow x_j = 0$.

Les sous-espaces E_i sont indépendants : $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$ et comme $Rg(f_i) = Dim(E_i)$, $\sum_{i=1}^{k} Rg(f_i) = n$.

9° EXERCICE

1° Question

Si A est définie positive, toutes ses valeurs propres $l_i(A)$ sont strictement positives et $Det(A) = \prod_{i=1}^{n} l_i(A) > 0$.

Si A est semi-définie positive sans être définie positive, alors elle admet 0 comme valeur propre et son déterminant est nul.

2° Question

Si A est définie positive, $X^* AX > 0$ pour tout $X \in \mathbb{C}^n$. En choisissant pour X le vecteur E_i de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ dont toutes les composantes sont nulles sauf la i$^{\text{ème}}$ égale à 1 : $E_i^* AE_i = a_{i,i}$.

L'adaptation au cas : A est semi-définie positive est immédiate.

3° Question

Si A est définie positive, $(X,Y)\mapsto Y^*AX$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{C}^n$.

Selon Cauchy-Schwarz : $\forall X,Y\in\mathbb{C}^n : |Y^*AX|^2 \le (Y^*AY)(X^*AX)$.

En choisissant $X=E_i, Y=E_j$, on obtient : $|a_{i,j}|^2 \le a_{i,i}a_{j,j}$.

10° PROBLÈME

1° Question

Pour $k=1\cdots n$, soit $X\in\mathbb{C}^k-\{0\}$ et $X'=\left(\begin{array}{c} X \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right)\in\mathbb{C}^n$, alors :

$$X'^*AX' = X^*A_kX \ .$$

A étant définie positive, pour tout $X\in\mathbb{C}^k-\{0\}$: $X^*A_kX = X'^*AX'>0$.

A_k est donc définie positive.

2° Question

Si A est définie positive, il en est de même pour A_k ($k=1\cdots n$) et selon l'exercice précédent $Det(A_k)>0$.

3° Question

X' et X sont liés par la relation : $X=PX'$. D'où :

$$X^*AX = X'^*P^*APX'$$

Avec les conventions d'écriture : $A=\left(\begin{array}{c|c} A_{n-1} & Y \\ \hline Y^* & a_{n,n} \end{array}\right)$ et :

$$P^*AP=\left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline Z^* & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A_{n-1} & Y \\ \hline Y^* & a_{n,n} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & Z \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline Z^* & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A_{n-1} & A_{n-1}Z+Y \\ \hline Y^* & Y^*Z+a_{n,n} \end{array}\right)$$

Comme $Det(A_{n-1})>0$, A_{n-1} est inversible, ce qui légitime la définition de Z tel que : $A_{n-1}Z+Y=0$.

$$P^*AP=\left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline Z^* & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A_{n-1} & 0 \\ \hline Y^* & Y^*Z+a_{n,n} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} A_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & Y^*Z+a_{n,n} \end{array}\right)$$

En posant $a=Y^*Z+a_{n,n}$ c'est bien la forme requise.

4° Question

La proposition est manifestement vraie pour $n=1$.

En la supposant vraie pour $n-1$, soit $A\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne avec, pour $k=1\cdots n, Det(A_k)>0$.

On a, d'une part :

$$Det(P*AP)=\underbrace{Det(P*)}_{=1}Det(A)\underbrace{Det(P)}_{=1}=Det(A)$$

de l'autre :

$$Det(P*AP)=\left|\begin{array}{c|c} A_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & a \end{array}\right|=Det(A_{n-1})a .$$

Donc comme $Det(A_{n-1})$ et $Det(A)$ sont strictement positifs, $a>0$.

Pour tout $X\in\mathbb{C}^n$: $X*AX=X'*\left(\begin{array}{c|c} A_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & a \end{array}\right)X'$.

Et en posant : $X'=\left(\begin{array}{c} X_{n-1} \\ \hline x \end{array}\right)$, $X_{n-1}\in\mathbb{C}^{n-1}$:

$$X*AX=\left(X_{n-1}*\mid \overline{x}\right)*\left(\begin{array}{c|c} A_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & a \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} X_{n-1} \\ \hline x \end{array}\right)=X_{n-1}*A_{n-1}X_{n-1}+a\left|x\right|^2 .$$

Pour la matrice A_{n-1}, les déterminants des sous-matrices, qui coïncident au dernier près avec ceux de A sont strictement positifs. Selon l'hypothèse de récurrence A_{n-1} est définie positive et comme de plus $a>0$,

$$X*AX=X_{n-1}*A_{n-1}X_{n-1}+a\left|x\right|^2\geq 0$$

Si $X\neq 0$, il en est de même de X' de sorte que X_{n-1} et x ne sauraient être simultanément nuls. Donc un des termes au moins de $X_{n-1}*A_{n-1}X_{n-1}+a\left|x\right|^2$ est strictement positif. Et la matrice A est définie positive.

11° EXERCICE

Si A est hermitienne, $A=QDiag(l_1,\cdots,l_n)Q*$ avec Q unitaire et $l_i\in\mathbb{R}$.

$\exp(A)=QDiag(e^{l_1},\cdots,e^{l_n})Q*$

$\exp(A)$ est donc aussi hermitienne et comme toutes ses valeurs propres sont strictement positives, elle est définie positive.

12° PROBLÈME

1° Question

Un calcul un rien fastidieux, mais sans difficulté montre que :

$$a_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}l_k q_{i,k}\overline{q}_{j,k}$$

2° Question

$$X^*CX = \sum_{i,j=1}^{n} \bar{x}_i a_{i,j} b_{i,j} x_j = \sum_{i,j=1}^{n} \bar{x}_i \left(\sum_{k=1}^{n} l_k q_{i,k} \bar{q}_{j,k} \right) b_{i,j} x_j = \sum_{i,j,k=1}^{n} \bar{x}_i l_k q_{i,k} \bar{q}_{j,k} b_{i,j} x_j$$

$$= \sum_{k=1}^{n} l_k \sum_{i,j=1}^{n} \bar{x}_i q_{i,k} b_{i,j} x_j \bar{q}_{j,k}$$

Or en posant : $X_k = \begin{pmatrix} x_1 \bar{q}_{1,k} \\ \vdots \\ x_n \bar{q}_{n,k} \end{pmatrix}$, $X_k{}^* B X_k = \sum_{i,j=1}^{n} \bar{x}_i q_{i,k} b_{i,j} x_j \bar{q}_{j,k}$. Donc :

$$X^*CX = \sum_{k=1}^{n} l_k (X_k{}^* B X_k)$$

Or les valeurs propres l_k de la matrice semi définie positive A sont positives ou nulles et $X_k{}^* B X_k \geq$ puisque B est aussi semi définie positive. Donc $X^*CX \geq 0$ et $C = A \odot B$ semi définie positive.

3° Question

Dans le cas où les deux matrices sont définies positives, les l_k sont strictement positifs. Il suffit don de s'assurer que si $X \neq 0$, un au moins des X_k est différent de 0. Or si $X \neq 0$, il existe i tel que $x_i \neq 0$ et il existe une colonne k de Q,, qui rappelons le est unitaire donc inversible, tel que $q_{i,k} \neq 0$. Ce qui fournit le vecteur X_k recherché.

13° EXERCICE

Si M est inversible, dans la décomposition polaire $M = UH$, la matrice semi-définie positive H est aussi inversible et de ce fait est définie positive.

Supposons qu'il existe deux décompositions : $M = UH = U'H'$.

$UH = U'H' \Rightarrow U'^*U = H^{-1}H'$

Donc $H^{-1}H'$ est unitaire. Autrement dit :

$H^{-1}H'\left(H^{-1}H'\right)^* = I \Rightarrow H^{-1}H'H'^*H^{-1*} = I$.

et comme H, H^{-1}, H' sont auto-adjointes :

$H^{-1}H'^2H^{-1} = I \Rightarrow H'^2 = H^2$.

H étant définie positive, $H = QDiag(l_1, \cdots, l_n)\, Q^*$ avec Q unitaire et $l_i > 0$.

Donc : $H'^2 = H^2 = QDiag(l_1^2, \cdots, l_n^2)Q^*$

H' étant définie positive, ses valeurs propres sont strictement positives. Il en résulte que : $H' = QDiag(l_1, \cdots, l_n)Q^* = H$.

14° EXERCICE

1° Question

A est définie positive. Selon le problème VI.10, $\forall k = 1 \cdots n, Det(A_k) > 0$. Et c'est précisément la condition énoncée à l'exercice II.12 pour que A possède une décomposition LU.

2° Question

Soit $A = LU$ avec $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} u_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & u_n \end{pmatrix}$

(selon l'usage établi, les * désignent des termes quelconques).

Pour $k = 1 \cdots n$, $A_k = L_k U_k$. Donc $Det(A_k) = Det(L_k) Det(U_k) = \prod_{i=1}^{k} u_i$. Comme, $k = 1 \cdots n, Det(A_k) > 0$, il en résulte que tous les u_i sont strictement positifs.

A peut s'écrire :

$A = LDiag(u_1, \cdots, u_n) U'$ avec $U' = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A étant hermitienne :

$$A = A^* \Rightarrow A = \underbrace{U'^*}_{L} \underbrace{Diag(u_1, \cdots, u_n)\, L^*}_{U}$$

Nous voici en présence d'une deuxième décomposition LU de A. D'où :
$L = U'^*$ et donc $A = LDiag(u_1, \cdots, u_n)\, L^*$.
Mais, comme les u_i sont strictement positifs, on peut aussi écrire :

$$A = LDiag\left(\sqrt{u_1}, \cdots, \sqrt{u_n}\right) Diag\left(\sqrt{u_1}, \cdots, \sqrt{u_n}\right) L^*$$

ce qui en posant : $L' = LDiag\left(\sqrt{u_1}, \cdots, \sqrt{u_n}\right)$ fournit la décomposition désirée.

CHAPITRE VII

PETITES QUESTIONS POUR FAIRE LE POINT

1.

$$M=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\quad M^2=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}\quad \|M\|=1,\|M^2\|=2\quad \cancel{\|M^2\|\le\|M\|^2}$$

2. Si P est une matrice de projection :

$\|P\|_E=\sqrt{Tr(P^*P)}=\sqrt{Tr(P)}$

Une matrice de projection de rang r étant semblable à $Diag(\underbrace{1,\cdots,1}_{r\ \text{fois}},0,\cdots 0)$, on peut compléter : $\|P\|_E=\sqrt{Tr(P)}=\sqrt{Rg(P)}$.

3. Si H est hermitienne : $H^*=H$. La somme C_j des modules de la colonne j de H est égale à la somme L_j des modules de la ligne j de H. Par conséquent : $\|H\|_1=\max\limits_j C_j=\max\limits_j L_j=\|H\|_\infty$.

4. $\|D\|_1=\|D\|_\infty=\|D\|_2=\max\limits_i|a_i|\quad \|D\|_E=\sqrt{\sum\limits_i|a_i|^2}$.

5. Si $A'=Q^*AQ$ avec Q unitaire :

$\|A'\|_2=\sqrt{r(A'^*A')}=\sqrt{r(Q^*A^*QQ^*AQ)}=\sqrt{r(Q^*A^*AQ)}$

Q^*A^*AQ et A^*A étant unitairement semblables ont même valeurs propres. D'où : $\|A'\|_2=\sqrt{r(Q^*A^*AQ)}=\sqrt{r(A^*A)}=\|A\|_2$.

6. Si elles sont unitairement semblables, la proposition VII.6 donne une réponse affirmative. Si elles sont «simplement » semblables, la réponse est négative. Exemple :

$\begin{pmatrix}1&4\\1&1\end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix}3&0\\0&-1\end{pmatrix}$ et leurs norme euclidiennes respectives sont $\sqrt{19}$ et $\sqrt{10}$.

7. $\|\ \|_E$ est une norme associée à un produit scalaire et l'égalité du parallélogramme (cf. propositions III.22 et III.55) est vérifiée :

$$\|A+B\|_E^2+\|A-B\|_E^2=2\|A\|_E^2+2\|B\|_E^2 .$$

8. Non : $r(A)=0$ n'implique pas la nullité de A mais sa nilpotence.

9. A est symétrique réelle. Ses valeurs propres sont réelles et $\|A\|_1=\|A\|_\infty=3$. Donc : $Spec(A)\subset[-3,3]$.

10.

$$R_A(U_k)=\frac{U_k*AU_k}{U_k*U_k}=\frac{U_k*l_k(A)U_k}{U_k*U_k}=l_k(A)$$

11. Selon le corollaire VII.21 :

$$l_1(A)+l_3(B)\le l_1(A+B)\le l_1(A)+l_1(B)\Rightarrow 2\le l_1(A+B)\le 5$$
$$l_2(A)+l_3(B)\le l_2(A+B)\le l_2(A)+l_1(B)\Rightarrow 1\le l_2(A+B)\le 4$$
$$l_3(A)+l_3(B)\le l_3(A+B)\le l_3(A)+l_1(B)\Rightarrow 0\le l_3(A+B)\le 3$$

1° EXERCICE

En recourant aux services de Maple…

1° Question

```
> A:=matrix([[1-2*I, 1-I, 1], [-1+I, -1, 0], [3, 2, 2*I]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1-2I & 1-I & 1 \\ -1+I & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 2I \end{bmatrix}$$

```
> for x in [1,infinity,frobenius] do x, norm(A,x) od;
```

$$1,\ 3+\sqrt{5}+\sqrt{2}$$

$$\infty,\ 7$$

$$frobenius,\ 2\sqrt{7}$$

La meilleure majoration est fournie par la norme euclidienne (Frobenius) :
$r(A) \leq 2\sqrt{7}$

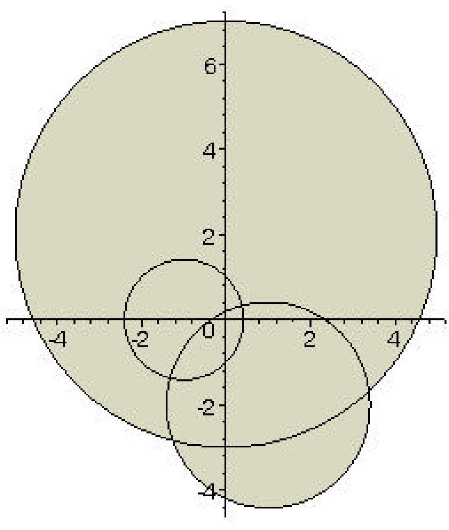
2° Question

```
> with(procalgebre) :
> gershgorin(A);
```

$$Centre,\ [1,\ -2],\ Rayon,\ 1+\sqrt{2}$$

$$Centre,\ [-1,\ 0],\ Rayon,\ \sqrt{2}$$

$$Centre,\ [0,\ 2],\ Rayon,\ 5$$




```
> eigenvals(A);
```

$$1,\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3},\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3}$$

2° EXERCICE

1° Question

```
> B:=matrix([[2, -I, 1+sqrt(3)*I], [I, 0, 4-3*I], [1-sqrt(3)*I, 4+3*I,
-1]]);
```

$$B := \begin{bmatrix} 2 & -I & 1+I\sqrt{3} \\ I & 0 & 4-3\,I \\ 1-I\sqrt{3} & 4+3\,I & -1 \end{bmatrix}$$

```
> for x in [1,infinity,frobenius] do x, norm(B,x) od;
```

$$1,\ 8$$

$$\infty,\ 8$$

$$frobenius,\ \sqrt{65}$$

La meilleure majoration est fournie par les normes $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_\infty$: $r(A) \le 8$

Mais de plus la matrice est hermitienne et ses valeurs propres sont réelles :

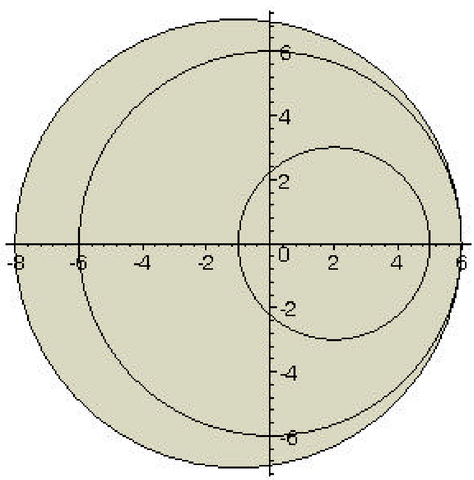
$$Spec(B) \subset [-8,8]$$

```
> with(procalgebre) :
> gershgorin(B);
```

$$Centre,\ [2,\ 0],\ Rayon,\ 3$$

$$Centre,\ [0,\ 0],\ Rayon,\ 6$$

$$Centre,\ [-1,\ 0],\ Rayon,\ 7$$



Ce qui permet d'améliorer la localisation : $Spec(B) \subset [-8,6]$.

3° EXERCICE

Les disques de Gershgorin sont : D_i de centre $a_{i,i}$, de rayon $\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{i,j}|$

Comme $\left|a_{i,i}\right| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \left|a_{i,j}\right|$, $0 \notin D_i$. 0 n'est donc pas valeur propre de A qui est donc inversible.

4° EXERCICE

Si A est normale, elle est diagonalisable dans une base propre orthonormale : $A = QDiag(l_1, \cdots, l_n) Q^*$ avec Q unitaire.

$A^* A = QDiag(\overline{l}_1, \cdots, \overline{l}_n) Q^* QDiag(l_1, \cdots, l_n) Q^* = QDiag(\left|l_1\right|^2, \cdots, \left|l_n\right|^2) Q^*$.

$r(A^*A) = \max_i \left|l_i\right|^2$. Donc : $\left\|A\right\|_2 = \sqrt{r(A^*A)} = \max_i \left|l_i\right| = r(A)$.

5° EXERCICE

1° Question

Soit A symétrique et B antisymétrique :

$\langle A ; B \rangle = Tr(B^t A) = Tr(-BA) = -Tr(AB) = -Tr\left((AB)^t\right) = -Tr(B^t A) = -\langle A ; B \rangle$

Donc $\langle A ; B \rangle = 0$.

Les sous-espaces supplémentaires $\mathcal{M}s_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{MA}_n(\mathbb{R})$ sont donc orthogonaux. Et la projection $A \mapsto \frac{1}{2}(A + A^t)$ est la projection orthogonale sur $\mathcal{M}s_n(\mathbb{R})$.

Selon la proposition VI.23 : $\min_{B \in \mathcal{M}S_n(\mathbb{R})} \left\|A - B\right\|_E = \frac{1}{2}(A + A^t)$.

2° Question

Dans le cas complexe avec $A^* = A$ et $B^* = -B$:

$\langle A ; B \rangle = Tr(B^* A) = Tr(-BA) = -Tr(AB) = -\overline{Tr\left((AB)^*\right)} = -\overline{Tr(B^t A)} = -\overline{\langle A ; B \rangle}$

De $\langle A ; B \rangle = -\overline{\langle A ; B \rangle}$, on peut simplement conclure $\mathrm{Re}\left(\langle A ; B \rangle\right) = 0$.

6° EXERCICE

Soit $M = UH$ la décomposition polaire avec U unitaire, H semi définie positive. Alors :

$\left\|M - Q\right\|_E = \left\|UH - Q\right\|_E$ avec Q unitaire.

Selon la proposition VII.9 $\left\|UH - Q\right\|_E = \left\|U^*UH - U^*Q\right\|_E = \left\|H - U^*Q\right\|_E$.

$\left\|M - Q\right\|_E = \left\|H - U^*Q\right\|_E$

H étant semi-définie positive : $H = PDiag(l_1, \cdots, l_n) P^*$, P unitaire et $l_i \geq 0$.

$\left\|M - Q\right\|_E = \left\|PDiag(l_1, \cdots, l_n) P^* - U^*Q\right\|_E$

Et en usant encore de proposition VII.9 :

$\|M-Q\|_E = \|Diag(l_1,\cdots,l_n) - P^*U^*QP\|_E$

La matrice P^*U^*QP, produit de matrices unitaires est unitaire. En posant $B=\left(b_{i,j}\right)_{\substack{i=1\cdots n\\ j=1\cdots n}}$ et en utilisant la formule de calcul de $\|\ \|_E$:

$$\|M-Q\|_E^2 = \|Diag(l_1,\cdots,l_n)-B\|_E^2 = \sum_{i=1}^{n}\left|l_i - b_{i,i}\right|^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left|b_{i,j}\right|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(l_i - b_{i,i})(l_i - \overline{b}_{i,i}) + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left|b_{i,j}\right|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(l_i^2 - 2\mathrm{Re}(b_{i,i})\,l_i + \left|b_{i,i}\right|^2) + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left|b_{i,j}\right|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(l_i^2 - 2\mathrm{Re}(b_{i,i})\,l_i) + \underbrace{\sum_{i,j=1}^{n}\left|b_{i,j}\right|^2}_{=\|B\|_E^2}$$

Et comme B est unitaire, selon la proposition VII.9 : $\|B\|_E^2 = n$.

$$\|M-Q\|_E^2 = \sum_{i=1}^{n}(l_i^2 - 2\mathrm{Re}(b_{i,i})\,l_i) + n = \sum_{i=1}^{n}(l_i^2 - 2\mathrm{Re}(b_{i,i})\,l_i + 1)$$

Comme B est unitaire, $\left|b_{i,i}\right| \leq 1$ et $\mathrm{Re}(b_{i,i})$ aussi. Donc :

$$\|M-Q\|_E^2 \geq \sum_{i=1}^{n}(l_i^2 - 2\,l_i + 1) = \sum_{i=1}^{n}(l_i - 1)^2$$

$\sum_{i=1}^{n}(l_i - 1)^2$ est donc un minorant de $\|M-Q\|_E^2$. Or si l'on choisit comme matrice Q, la matrice U, alors : $B = P^*U^*QP = P^*U^*UP = I$ et $\|M-U\|_E^2 = \|Diag(l_1,\cdots,l_n) - I\|_E^2 = \sum_{i=1}^{n}(l_i - 1)^2$. Donc :

$$\min_{\substack{Q\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\\ Q \text{ unitaire}}} \|M-Q\|_E = \|M-U\|_E .$$

7° PROBLÈME

1° Question

Pour a scalaire et $X,Y\in\mathbb{C}^n$:

✓ $\|a\,X\|_A = \|Aa\,X\|_\infty = |a|\,\|AX\|_\infty = |a|\,\|X\|_A$

- ✓ $\|X+Y\|_A = \|A(X+Y)\|_\infty \leq \|AX\|_\infty + \|AX\|_\infty = \|X\|_A + \|Y\|_A$
- ✓ $\|X\|_A = 0 \Rightarrow \|AX\|_\infty = 0 \Rightarrow AX = 0 \Rightarrow X = 0$ puisque A inversible.

2° Question

$$\|M\|_A = \sup_{X\neq 0} \frac{\|MX\|_A}{\|X\|_A} = \sup_{X\neq 0} \frac{\|AMX\|_\infty}{\|AX\|_\infty}$$

En posant : $AX = X' \Leftrightarrow X = A^{-1}X'$ et $X \neq 0 \Leftrightarrow X' \neq 0$:

$$\|M\|_A = \sup_{X'\neq 0} \frac{\|AMA^{-1}X'\|_\infty}{\|X'\|_\infty} = \|AMA^{-1}\|_\infty$$

3° Question

Si M est diagonalisable : $M = QDiag(l_1,\cdots,l_n)Q^{-1}$.

On peut supposer $r(M) = |l_1|$:

$\|M\|_{Q^{-1}} == \|Q^{-1}MQ\|_\infty = \|Diag(l_1,\cdots,l_n)\|_\infty = |l_1| = r(M)$.

4° Question

Soit $D = Diag\left(1, e, e^2, \cdots, e^{n-1}\right)$

La multiplication par D^{-1} multiplie la ligne i de J par $\dfrac{1}{e^{i-1}}$.

La multiplication par D multiplie la colonne j de J par e^{j-1}

Donc les termes de la diagonale sont inchangés tandis que les k_i sont multipliés par $\dfrac{1}{e^{i-1}}e^i = e$. D'où :

$$D^{-1}JD = \begin{pmatrix} l_1 & ek_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & ek_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & l_n \end{pmatrix}$$

Comme $M = QJQ^{-1}$:

$\|M\|_{(QD)^{-1}} = \|(QD)^{-1}MQD\|_\infty = \|D^{-1}Q^{-1}MQD\|_\infty = \|D^{-1}JD\|_\infty$.

Or $\|D^{-1}JD\|_\infty = \max\left(|l_1+ek_1|,\cdots,|l_{n-1}+ek_{n-1}|,|l_n|\right) \leq \max_i |l_i| + e$.

Et comme $\max_i |l_i| = r(M)$: $\|M\|_{(QD)^{-1}} \leq r(M) + e$.

On rappelle que selon la proposition VII.10 $\|M\|_{(QD)^{-1}} \geq r(M)$.

5° *Question*

Si $r(M) < 1$, en choisissant $e < 1 - r(M)$, il existe donc une norme matricielle subordonnée telle que $\|M\| < 1$.

Comme cette norme est matricielle, pour tout entier $t > 0$ $\|M^t\| \leq \|M\|^t$.

Comme $\|M\| < 1$: $\lim_{t \to +\infty} \|M\|^t = 0 \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} \|M^t\| = 0 \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} M^t = 0$.

8° PROBLÈME

1°Question

En tenant compte de $\| \ \|$ norme matricielle subordonnée :

- ✓ $cond(A) = \|A\|\|A^{-1}\| \geq \|AA^{-1}\| = \|I\| = 1$
- ✓ $cond(a\,A) = \|a\,A\|\left\|\frac{1}{a}A^{-1}\right\| = \frac{|a|}{|a|}\|A\|\|A^{-1}\| = cond(A)$
- ✓ $$\begin{aligned} cond(AB) &= \|AB\|\|B^{-1}A^{-1}\| \leq \|A\|\|B\|\|B^{-1}\|\|A^{-1}\| \\ &\leq \|A\|\|A^{-1}\|\|B\|\|B^{-1}\| \\ &\leq cond(A)cond(B) \end{aligned}$$

2° Question

A étant inversible, A^*, AA^*, A^*A aussi.

$\|A\|_2 = \sqrt{r(A^*A)} = s_1$

$\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{r(A^{-1} * A^{-1})} = \sqrt{r\left((AA^*)^{-1}\right)}$

Les valeurs propres de $(AA^*)^{-1}$ sont les inverses des valeurs propres de AA^* qui sont les mêmes que les valeurs propres, toutes strictement positives, de A^*A (proposition VI.44). Donc $r\left((AA^*)^{-1}\right) = \frac{1}{s_n}$ et : $cond_2(A) = \frac{s_1}{s_2}$.

Si U est unitaire :

$\|U\|_2 = \sqrt{r(U^*U)} = \sqrt{r(I)} = 1$ et $\|U^{-1}\|_2 = \|U^*\|_2 = \|U\|_2 = 1$. D'où :

$$cond_2(U) = 1$$

$\|AU\|_2 = \sqrt{r(AUU^*A^*)} = \sqrt{r(AA^*)} = \|A\|_2$.

De la même façon, $\|(AU)^{-1}\|_2 = \|A^{-1}\|_2$ et $cond_2(AU) = cond_2(A)$.

Même chose pour la multiplication à gauche par *U*.

3° Question

$$\begin{cases} AX = Y \\ A(X+\Delta X) = Y + \Delta Y \end{cases} \Rightarrow A\Delta X = \Delta Y \Rightarrow \Delta X = A^{-1}\Delta Y$$. En passant aux normes :

$$\|\Delta X\| \le \|A^{-1}\| \|\Delta Y\| \Rightarrow \frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \le \|A^{-1}\| \frac{\|\Delta Y\|}{\|Y\|} \frac{\|Y\|}{\|X\|}$$

Comme $AX = Y$, $\frac{\|Y\|}{\|X\|} \le \|A\|$, $\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \le \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\Delta Y\|}{\|Y\|}$ et finalement :

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \le cond(A) \frac{\|\Delta Y\|}{\|Y\|}$$

Selon la remarque :

il existe ΔY tel que $\|A^{-1}\Delta Y\| = \|A^{-1}\| \|\Delta Y\| \Rightarrow \|\Delta X\| = \|A^{-1}\| \|\Delta Y\|$

il existe X tel que $\|AX\| = \|A\| \|X\| \Rightarrow \|Y\| = \|A\| \|X\|$

Dans ces conditions :

$$\|\Delta X\| = \|A^{-1}\| \|\Delta Y\| \Rightarrow \frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} = \|A^{-1}\| \frac{\|\Delta Y\|}{\|Y\|} \frac{\|Y\|}{\|X\|} = \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\Delta Y\|}{\|Y\|}$$ et :

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} = cond(A) \frac{\|\Delta Y\|}{\|Y\|}$$

Application numérique :

Le package linalg de Maple possédant une fonction cond(), autant l'utiliser :

```
> A:=matrix([[10, 9, 2], [10, 10, 1], [9, 9, 1]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 10 & 9 & 2 \\ 10 & 10 & 1 \\ 9 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> Ai:=inverse(A);
```

$$Ai := \begin{bmatrix} 1 & 9 & -11 \\ -1 & -8 & 10 \\ 0 & -9 & 10 \end{bmatrix}$$

```
> for i in [1,infinity,2] do i, evalf(cond(A,i));od;
```

1, 899.   ∞, 441.   2, 547.998174

Quelque soit la norme matricielle subordonnée sous-jacente, $con(A)$ est élevée…

```
> Y:=matrix([[21], [21], [19]]);
```

$$Y := \begin{bmatrix} 21 \\ 21 \\ 19 \end{bmatrix}$$

```
> X:=multiply(Ai,Y);
```

$$X := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
> Yp:=matrix([[21.1], [20.9], [19.1]]);
```

$$Yp := \begin{bmatrix} 21.1 \\ 20.9 \\ 19.1 \end{bmatrix}$$

```
> Xp:=multiply(Ai,Yp);
```

$$Xp := \begin{bmatrix} -.9 \\ 2.7 \\ 2.9 \end{bmatrix}$$

Une perturbation apparemment anodine de Y perturbe considérablement la solution du système.

4° Question

$$\begin{cases} AX = Y \\ (A+\Delta A)(X+\Delta X) = Y \end{cases} \Rightarrow A\Delta X = -\Delta A(X+\Delta X) \Rightarrow \Delta X = -A^{-1}\Delta A(X+\Delta X)$$

En passant aux normes :

$$\|\Delta X\| \le \|A^{-1}\| \|\Delta A\| \|(X+\Delta X)\| \Rightarrow \frac{\|\Delta X\|}{\|(X+\Delta X)\|} \le \|A^{-1}\| \|A\| \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$. D'où :

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|(X+\Delta X)\|} \le cond(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

Avec $Y = (A + a\,I)V$ et $\Delta A = a\,I$, vérifiant les conditions énoncées :

$$\begin{cases} AX = Y \\ (A+\Delta A)(X+\Delta X) = Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = A^{-1}(A+a\,I)V \\ X+\Delta X = (A+a\,I)^{-1}(A+a\,I)V \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X = (I + a\,A^{-1})V \\ X+\Delta X = V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta X = -a\,A^{-1}V \\ X+\Delta X = V \end{cases}$$

Tenant compte de $\|A^{-1}V\| = \|A^{-}\| \|V\|$:

$$\|\Delta X\| = |a| \|A^{-1}\| \|V\| \Rightarrow \frac{\|\Delta X\|}{\|X+\Delta X\|} = \frac{|a|}{\|A\|}\|A\| \|A^{-1}\| \Rightarrow \frac{\|\Delta X\|}{\|X+\Delta X\|} = \frac{|a|}{\|A\|} cond(A)$$

Et comme $\Delta A = a\,I$, $|a| = \|\Delta A\|$ et :

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|(X+\Delta X)\|} = cond(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

Application numérique :

```
> Ap:=matrix([[10.2, 9.1, 2], [10, 9.9, 1], [9, 9, 1.1]]);
```

$$Ap := \begin{bmatrix} 10.2 & 9.1 & 2 \\ 10 & 9.9 & 1 \\ 9 & 9 & 1.1 \end{bmatrix}$$

```
> multiply(inverse(Ap),Y);
```

$$\begin{bmatrix} 1.45239748 \\ .63238359 \\ .21542738 \end{bmatrix}$$

9° PROBLÈME

1° Question

$I+M$ non inversible implique –1 valeur propre et donc $\|M\| \geq r(M) \geq 1$.

2° Question

Soit $l \in Spec(A+\Delta A) - Spec(A)$:

$D' = D - l\,I = Diag(l_1 - l, \cdots, l_n - l)$. Comme $l \notin Spec(A)$, $l_i - l \neq 0$ pour $i = 1 \cdots n$ et D' est inversible.

$P^{-1}(A+\Delta A - l\,I)P = P^{-1}AP + P^{-1}\Delta AP - l\,I = D - l\,I + P^{-1}\Delta AP$.

Compte tenu de l'inversibilité de $D' = D - l\,I$:

$$P^{-1}(A+\Delta A - l\,I)P = D'(I + D'^{-1}P^{-1}\Delta AP)$$

3° Question

Comme $l \in Spec(A+\Delta A)$, $A+\Delta A - l\,I$ non inversible et $P^{-1}(A+\Delta A - l\,I)P$ et $I + D'^{-1}P^{-1}\Delta AP$ non inversible. Et selon la 1° question :

$\left\|D'^{-1}P^{-1}\Delta AP\right\| \geq 1 \Rightarrow \left\|D'^{-1}\right\|\|P\|\left\|P^{-1}\right\|\|\Delta A\| \geq 1 \Rightarrow \left\|D'^{-1}\right\| cond(P)\|\Delta A\| \geq 1$

Comme $D'^{-1} = Diag\left(\dfrac{1}{l_1 - l}, \cdots, \dfrac{1}{l_n - l}\right)$, $\left\|D'^{-1}\right\| = \max\limits_i \dfrac{1}{|l_i - l|} = \dfrac{1}{\min\limits_i |l_i - l|}$.

Et $\left\|D'^{-1}\right\| cond(P)\|\Delta A\| \geq 1 \Rightarrow \min\limits_i |l - l_i| \leq cond(P)\|\Delta A\|$.

Donc : $\forall l \in Spec(A+\Delta A) - Spec(A), \exists i = 1 \cdots n :\ |l - l_i| \leq cond(P)\|\Delta A\|$

4° Question

Soit $l \in Spec(A+\Delta A)$, alors :

1) si $l \in Spec(A)$, il existe $l_i \in Spec(A)$ tel que $l = l_i$ et $l \in D(l_i, R)$!

2) si $l \notin Spec(A)$, la question précédente montre l'existence d'un $l_i \in Spec(A)$ tel que $l \in D(l_i, R)$.

Donc : $Spec(A+\Delta A) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} D(l_i, R)$

5° Question

Si A est normale : $A = PDP^*$ où P unitaire. Selon la 2° question du problème VII.8, $cond_2(P) = 1$. Donc :

$$Spec(A+\Delta A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} D(l_i, \|\Delta A\|)$$

10° EXERCICE

Si B est définie positive, $(X,Y) \mapsto Y^*BX$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{C}^n$. Il existe donc une base $\boldsymbol{b}$ de $\mathbb{C}^n$ orthonormale pour ce produit scalaire. Si l 'on désigne par X' les coordonnées dans cette base $\boldsymbol{b}$ d'un vecteur X de $\mathbb{C}^n$, $X = PX'$ où P désigne la matrice de changement de base. Alors, comme a matrice P^*AP est auto-adjointe :

$$\frac{X^*AX}{X^*BX} = \frac{X'^*P^*APX'}{X'^*X'} = R_{P^*AP}(X')$$

Il suffit d'appliquer alors la proposition VII.19 :

$$\max_{X\neq 0} \frac{X^*AX}{X^*BX} = \max_{X'\neq 0} R_{P^*AP}(X') = l_1(P^*AP)$$

$$\min_{X\neq 0} \frac{X^*AX}{X^*BX} = \min_{X'\neq 0} R_{P^*AP}(X') = l_n(P^*AP)$$

Attention :

Rien n'assure que la base canonique est orthonormale pour le produit scalaire définie par B. Autrement dit, on n'est pas fondé à supposer la matrice de passage P unitaire !

10° EXERCICE

1° Question

✓ Linéarité de p_u :

$$p_u(a\,x + b\,y) = a\,x + b\,y - \frac{<a\,x + b\,y; u>}{\|u\|^2}u$$

$$= a\,x + b\,y - \frac{a<x;u> + b<y;u>}{\|u\|^2}u = a\,(x - \frac{<x;u>}{\|u\|^2}u) + b\,(x - \frac{<y;u>}{\|u\|^2}u)$$

$$= a\;p_u(x) + b\;p_u(y)$$

✓ p_u est une projection :

$$p_u^2(x) = p_u(x - \frac{<x;u>}{\|u\|^2}u) = p_u(x) - \frac{<x;u>}{\|u\|^2}p_u(u) = p_u(x)\,.$$

✓ p_u est une projection orthogonale :

$$< p_u(x); y > = < x - \frac{< x;u >}{\|u\|^2} u; y > = < x; y > - \frac{< x;u >}{\|u\|^2} < u; y >$$

$$< x; p_u(y) > = < x; y - \frac{< y;u >}{\|u\|^2} u > = < x; y > - \frac{< y;u >}{\|u\|^2} < x;u >$$

On a donc $p_u^t = p_u$. Donc p_u est une projection orthogonale.

✓ $Ker(p_u) = Vec(u)$

$p_u(u) = u - \frac{<u;u>}{\|u\|^2} u = u - u = 0$. Donc $Vec(u) \subseteq Ker(p_u)$

Réciproquement, soit $x \in Ker(p_u)$, alors :

$p_u(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{< x;u >}{\|u\|^2} u \Rightarrow x \in Vec(u)$. Donc :

$$Ker(p_u) = Vec(u)$$

En résumé : p_u est la projection orthogonale sur $Vec(u)^{\perp}$

✓ Matrice de p_u dans la base ***b*** :

La définition de p_u se traduit en coordonnées par :

$P_u X = X - \frac{U^t X}{U^t U} U = X - \frac{1}{U^t U} U U^t X$ en commutant le scalaire $U^t X$ avec U.

D'où $P_u X = \left(I - \frac{1}{U^t U} U U^t \right) X$ et $P_u = \left(I - \frac{1}{U^t U} U U^t \right)$

2° Question

a)

$$A_i - P_u A_i = A_i - A_i + \frac{1}{U^t U} U U^t A_i = \frac{1}{U^t U} U U^t A_i$$

$$\|a_i - p_u(a_i)\|^2 = \langle a_i - p_u(a_i) ; a_i - p_u(a_i) \rangle = (A_i - P_u A_i)^t (A_i - P_u A_i)$$

$= (A_i^t - A_i^t P_u^t)(A_i - P_u A_i) = A_i^t A_i - A_i^t P_u A_i$ en utilisant $P_u^t = P_u$ et $P_u^2 = P_u$

$$= A_i^t (I - P_u) A_i = \frac{1}{U^t U} A_i^t U U^t A_i = \frac{1}{U^t U} U^t A_i A_i^t U$$

(en commutant les scalaires $A_i^t U$ et $U^t A_i$)

b)

On a : $\left(A_1 \mid \cdots \mid A_n\right)\begin{pmatrix} A_1^t \\ \hline \vdots \\ \hline A_n^t \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} A_i A_i^t$. D'où :

$$d_u = \sum_{i=1}^{n} \left\| a_i - p_u(a_i) \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{U^t U} U^t A_i A_i^t U$$
$$= \frac{1}{U^t U} U^t \left(\sum_{i=1}^{n} A_i A_i^t \right) U = \frac{1}{U^t U} U^t A A^t U$$

La matrice AA^t de taille $p\times p$, est semi-définie positive, donc (propositions VI.41 et VI.44) elle est diagonalisable dans une base orthonormale et toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles. On notera $l_1 \geq l_2 \geq \cdots \geq l_p$ les valeurs propres et $(v_1, v_2, \cdots, v_p)$ la base propre orthonormale associée. d_u est le quotient de Rayleigh $R_{AA^t}(U) = \dfrac{U^t A A^t U}{U^t U}$. Donc d'après IV.2.3 le minimum de ce quotient est la plus petite valeur propre de AA^t l_p et il est atteint pour $u = v_p$, autrement dit $U = V_p$.

Dans ce cas $Vec(u)^{\perp} = Vec(v_1, \cdots, v_{p-1})$, puisque la base propre étant orthonormale, tous ces vecteurs sont orthogonaux à $u = v_p$.

Commentaire :

La question sous-jacente dans ce problème était la celle-ci. Étant donné une liste n vecteurs $\mathcal{A}$ (liste que l'on retrouvera au chapitre XI sous l'appellation de nuage de points) dans un espace de dimension n, déterminer un hyperplan F tel que la somme des carrés des distances entre les points du nuage et leur projection orthogonale sur l'hyperplan soit minimum. La réponse est donc l'orthogonal d'un vecteur propre correspondant à la plus petite valeur propre de AA^t .

Dans le cas où le sous espace engendré par le nuage est de dimension $k \leq p-1$, alors il existe un hyperplan qui contient tous les points du nuage et $d_u = 0$. Mais dans ce cas le rang de AA^t est aussi $\leq p-1$ et donc la plus petite valeur propre $l_p = 0$.

CHAPITRE VIII

PETITES QUESTIONS POUR FAIRE LE POINT

1. Si A est de taille $n \times p$, A^- est de taille $p \times n$.

2. N'importe quelle matrice M de taille « adaptée » : $0M0 = 0$!

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible et $A^- = A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

Selon la proposition VIII.13, $\begin{pmatrix} A^{-1} \\ \hline 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une inverse généralisée réflexive de $(A \mid 0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Selon le théorème VII.3, AA^- est une matrice de projection donc : $(AA^-)^{10} = AA^-$.

5. Alors, avec les notations de la définition VIII.2, $Ker(f) = \{0\}$ et $Im(f) = F$, et f est inversible.

6. La première affirmation requière la réflexivité de f^-, propriété dont jouit f^+.

7. Dans les exemples présentées suite à la proposition VIII.21 figure :

$$X \in \mathbb{C}^n - \{0\} \Rightarrow X^+ = \frac{1}{\|X\|_2^2} X^*$$

Par adjonction, la propriété vaut aussi pour les vecteurs lignes et l'inverse de Moore-Penrose demandée est : $\frac{1}{30}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

8. Pas nécessairement : voir remarque suite à la proposition VIII.5.

9. $Rg(A) = Rg(A^-)$ si et seulement si A^- est réflexive (corollaire VIII.11).
$Rg(A) = Rg(A^+)$ puisque A^+ est réflexive.

10. Selon le deuxième exemple de la proposition VIII.21 :

$$\left(Diag(1,-1,0)\right)^+ = Diag(1,-1,0)$$

11. Ni l'un ni l'autre en général.

12. Elle même : $ppp = p$!

13. Oui. En utilisant la version matricielle de la proposition I.42 :

$$(A \oplus B)(A^+ \oplus B^+)(A \oplus B) = (AA^+A) \oplus (BB^+B) = A \oplus B$$

Idem pour les autres propriétés…

14. AA^+ est une projection orthogonale, ses valeurs propres sont 0 et 1.

15. Selon la proposition VIII.24 : $(XX^*)^+ = X^{+*} X^+$. Comme X est un vecteur colonne non nul : $X^+ = \dfrac{1}{\|X\|_2^2} X^*$. Donc :

$$(XX^*)^+ = \frac{1}{\|X\|_2^2} X \frac{1}{\|X\|_2^2} X^* = \frac{1}{\|X\|_2^4} XX^*$$

On peut aussi, procéder à une vérification directe des quatre propriétés caractéristiques de l'inverse de Moore-Penrose.

1° EXERCICE

1° Question

S'il existe X tel que $AXB = C$, alors :

$AA^{-}CB^{-}B = AA^{-}(AXB)B^{-}B = (AA^{-}A)X(BB^{-}B) = AXB = C$.

2° Question

Soit $X = A^{-}CB^{-} + Z - A^{-}AZBB^{-}$, alors :

$$AXB = A(A^{-}CB^{-} + Z - A^{-}AZBB^{-})B = AA^{-}CB^{-}B + AZB - \underbrace{AA^{-}A}_{=A}Z\underbrace{BB^{-}B}_{=B}$$

$$= AA^{-}CB^{-}B = C$$

3° Question

Soit X tel que $AXB = C$, alors, si $Z = X - A^{-}CB^{-}$:

$$A^{-}CB^{-} + Z - A^{-}AZBB^{-} = A^{-}CB^{-} + X - A^{-}CB^{-} - A^{-}A(X - A^{-}CB^{-})BB^{-}$$

$$= X - A^{-}\underbrace{AXB}_{=C}B^{-} + A^{-}\underbrace{AA^{-}CB^{-}B}_{=C}B^{-}$$

$$= X$$

Ce qui établit que toute solution de $AXB = C$ est de la forme indiquée.

En résumé :

$AXB = C$ a une solution si et seulement si $AA^{-}CB^{-}B = C$ et dans ce cas l'ensemble S des solutions est :

$S = \left\{ A^{-}CB^{-} + Z - A^{-}AZBB^{-} \,/\, Z \text{ désignant une matrice de même taille que } X \right\}$

2° EXERCICE

1° Question

$M\,M'M = ABB^{-}A^{-1}AB = ABB^{-}B = AB$.

Si B^{-} réflexive :

$M'M\,M' = B^{-}A^{-1}ABB^{-}A^{-1} = B^{-}BB^{-}A^{-1} = BA^{-1} = M'$.

2° Question

Selon la question précédente, $B^{+}A^{-1}$ est une inverse généralisée réflexive de AB. Il reste les question d'orthogonalité :

$$(MM')^{*} = MM' \text{ et } (M'M)^{*} = M'M \ ?$$

$(MM')^{*} = MM' \Leftrightarrow (ABB^{+}A^{-1})^{*} = ABB^{+}A^{-1} \Leftrightarrow A^{-1}{}^{*}(BB^{+})^{*}A^{*} = ABB^{+}A^{-1}$

$\Leftrightarrow A^{*-1}(BB^{+})A^{*} = ABB^{+}A^{-1}$

On ne peut conclure que si : $A^* = A^{-1}$, autrement dit si A est unitaire. Et dans ce cas on obtient aussi : $(M'M)^* = M'M$.

3° EXERCICE

1° Question

Suivant le corollaire VIII.25 : $U^+V = (U^*U)^+\underbrace{U^*V}_{=0} = 0$ et calcul analogue pour les autres relations.

2° Question

$MM' = (U+V)(U^+ + V^+) = UU^+ + \underbrace{UV^+}_{=0} + \underbrace{VU^+}_{=0} + VV^+ = UU^+ + VV^+$. UU^+ et VV^+ étant auto-adjointes, MM' aussi.

En pour suivant :

$M\,M'M = (UU^+ + VV^+)(U+V) = \underbrace{UU^+U}_{=U} + U\underbrace{U^+V}_{=0} + V\underbrace{V^+U}_{=0} + \underbrace{VV^+V}_{=V} = M$

Le calcul est analogue pour $M'M$ autoadjointe et $M'M\,M' = M$.

4° EXERCICE

1° Question

Comme $a_1 \neq 0$, 0 est valeur propre simple de *f*. Donc $Dim(E_0) = Dim(Ker(f)) = 1$ et $Rg(f) = n-1$.

2° Question

D'après Hamilton-Cayley :

$$C_f(f) = 0 \Rightarrow (-1)^n f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \cdots + a_2 f^2 + a_1 f = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{a_1}\left((-1)^n f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \cdots + a_2 f^2\right) = f$$

$$\Rightarrow f\left(-\frac{1}{a_1}\left((-1)^n f^{n-2} + a_{n-1}f^{n-3} + \cdots + a_2 Id\right)\right)f = f$$

$$\Rightarrow f\,P(f)\,f = f$$

ce qui qualifie $P(f)$ comme inverse généralisée de *f*.

Application numérique :

```
> A:=matrix([[1, 2, -12], [-1, -2, 6], [0, 0, 2]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -12 \\ -1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvalues(A);
```

$$0, 2, -1$$

```
> -charpoly(A,X);
```

$$-X^3 + X^2 + 2X$$

```
> P:=-1/2*(-X+1);
```

$$P := \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}$$

```
> Ap:=evalm(1/2*(A-diag(1,1,1)));
```

$$Ap := \begin{bmatrix} 0 & 1 & -6 \\ \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

```
> multiply(A,Ap,A);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -12 \\ -1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Mais Ap n'est pas réflexive :

```
> multiply(Ap,A,Ap);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

5° EXERCICE

1° Question

i) $\Rightarrow$ ii)

L'inclusion $Im(f^2) \subseteq Im(f)$ va de soit. Dans l'autre sens :

Soit $y \in Im(f)$, $y = f(x)$. Comme $E = Im(f) \oplus Ker f(f)$, x se décompose de manière unique : $x = \underbrace{f(x')}_{\in Im(f)} + \underbrace{x_0}_{\in Ker(f)}$. Donc : $y = f^2(x') + \underbrace{f(x_0)}_{=0} = f^2(x')$ et $y \in Im(f^2)$.

ii) $\Rightarrow$ iii)

Évident.

iii) $\Rightarrow$ iv)

D'après le théorème du rang :

$Rg(f^2) = Rg(f) \Rightarrow Dim(Ker(f^2)) = Dim(Ker(f))$

Comme $Ker(f) \subseteq Ker(f^2)$, l'inclusion est une égalité.

iv) $\Rightarrow$ i)

Soit $y \in Im(f) \cap Ker(f)$, alors : $y = f(x)$ et $f(y) = f^2(x) = 0$. Donc $x \in Ker(f^2)$. Si $Ker(f) = Ker(f^2)$, alors $y = f(x) = 0$.

$Im(f) \cap Ker(f) = \{0\}$. Donc $Im(f)$ et $Ker(f)$ sont en somme directe et puisque $Dim(Im(f)) + Dim(Ker(f)) = Dim(E)$, $E = Im(f) \oplus Kerf(f)$.

2° Question

On utilise les notations de la définition VIII.2.

Comme $E = F = Im(f) \oplus Kerf(f)$, On peut choisir pour définir $f^{\#}$:

$$E' = Im(f),\ F' = Ker(f) \text{ et } u = 0$$

La condition $u = 0$ garantit que $f^{\#}$ est réflexive.

De plus suivant le théorème VIII.9 :

$f^{\#} f$ est la projection sur $Im(f^{\#})$ selon $Ker(f)$

$f\, f^{\#}$ est la projection sur $Im(f)$ selon $Ker(f^{\#})$

Et comme alors, $Im(f^{\#}) = E' = Im(f)$ et $Ker(f) = F' = Ker(f^{\#})$, alors :

$$f^{\#} f = f\, f^{\#}$$

Réciproquement, si une inverse généralisée réflexive $f^{\#}$ de f vérifie $f^{\#} f = f\, f^{\#}$, alors : $Im(f^{\#}) = Im(f)$ et $Ker(f^{\#}) = Ker(f)$.

Comme $f^{\#}$ est réflexive, $u = 0$ et $E' = Im(f^{\#})$. On a donc :

$$E = E' \oplus Ker(f) = Im(f^{\#}) \oplus Ker(f) = Im(f) \oplus Ker(f)$$

3° Question

Selon la définition VIII.19, $f^{\#}$ est l'inverse de Moore-Penrose de f si et seulement si : $E' = Ker(f)^{\perp}$ et $F' = Im(f)^{\perp}$.

Or $f^{\#}$ est définie par : $E' = Im(f)$, $F' = Ker(f)$.

Donc : $f^{\#} = f^{+} \Leftrightarrow Im(f) = Ker(f)^{\perp} \Leftrightarrow Ker(f) = Im(f)^{\perp}$.

6° EXERCICE

Selon le corollaire VIII.25 : $M^{+} = M^{*}(MM^{*})^{+}$. Si $M = (A \mid B)$:

$$M^{+} = (A \mid B)^{+} = \begin{pmatrix} A^{*} \\ B^{*} \end{pmatrix} \left((A \mid B) \begin{pmatrix} A^{*} \\ B^{*} \end{pmatrix} \right)^{+} = \begin{pmatrix} A^{*} \\ B^{*} \end{pmatrix} (AA^{*} + BB^{*})^{+}$$

$$= \begin{pmatrix} A^{*}(AA^{*} + BB^{*})^{+} \\ B^{*}(AA^{*} + BB^{*})^{+} \end{pmatrix}$$

7° EXERCICE

Si H est semi-définie positive de rang r :
$H = PDiag(l_1, \cdots, l_r, 0, \cdots, 0)P^*$ avec $l_1, \cdots, l_r > 0$ et P unitaire.
La proposition VIII.23 indique alors que :

$$H^+ = PDiag\left(\frac{1}{l_1}, \cdots, \frac{1}{l_r}, 0, \cdots, 0\right)P^*$$

ce qui montre que H^+ est aussi semi-définie positive de rang r.

Si H est définie positive, elle est inversible et $H^+ = H^{-1} \ldots$

8° PROBLÈME

1° Question

MM^* est semi-définie positive, toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles. Donc $Det(MM^* + xI) \neq 0$ pour $x > 0$.

2° Question

Si $M = QDP^*$ avec $D = Diag(s_1, \cdots, s_r, 0, \cdots, 0)$ et les $s_i > 0$:

$$MM^* + xI = QD\underbrace{P^*P}_{=I}DQ^* + xI = QD^2Q^* + xI = Q(D^2 + xI)Q^*$$

$$= QDiag(x + s_1^2, \cdots, x + s_r^2, x, \cdots, x)Q^*$$

et :

$$(MM^* + xI)^{-1} = QDiag\left(\frac{1}{x + s_1^2}, \cdots, \frac{1}{x + s_r^2}, \frac{1}{x}, \cdots, \frac{1}{x}\right)Q^*$$

3° Question

$$M^*(MM^* + xI)^{-1} = PD\underbrace{Q^*Q}_{=I}Diag\left(\frac{1}{x + s_1^2}, \cdots, \frac{1}{x + s_r^2}, \frac{1}{x}, \cdots, \frac{1}{x}\right)Q^*$$

$$= PDiag(s_1, \cdots, s_r, 0, \cdots, 0)Diag\left(\frac{1}{x + s_1^2}, \cdots, \frac{1}{x + s_r^2}, \frac{1}{x}, \cdots, \frac{1}{x}\right)Q^*$$

$$= PDiag\left(\frac{s_1}{x + s_1^2}, \cdots, \frac{s_r}{x + s_r^2}, 0, \cdots, 0\right)Q^*$$

En passant à la limite :

$$\underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{Lim}\left(M*(MM*+xI)^{-1}\right)=\underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{Lim}\left(PDiag\left(\frac{s_1}{x+s_1^2},\cdots,\frac{s_r}{x+s_r^2},0,\cdots,0\right)Q*\right)$$

$$=PDiag\left(\frac{1}{s_1},\cdots,\frac{1}{s_r},0,\cdots,0\right)Q*$$

$$=M^+ \text{ selon la proposition VIII.27.}$$

4° Question

Un calcul analogue montre que :

$$M*(MM*+I)^{-k}=PDiag\left(s_1\left(\frac{1}{1+s_1^2}\right)^k,\cdots,s_r\left(\frac{1}{x+s_r^2}\right)^k,0,\cdots,0\right)Q*$$

D'où :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}M*(MM*+I)^{-k}=PDiag\left(s_1\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+s_1^2}\right)^k,\cdots,s_r\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{x+s_r^2}\right)^k,0,\cdots,0\right)Q*$$

or, selon la formule concernant les séries géométriques, pour $i=1\cdots r$:

$$s_i\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+s_i^2}\right)^k=s_i\left(\frac{1}{1-\frac{1}{1+s_i^2}}-1\right)=s_i\left(\frac{1+s_i^2}{s_i^2}-1\right)=\frac{1}{s_i}$$

Et finalement :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}M*(MM*+I)^{-k}=PDiag\left(\frac{1}{s_1},\cdots,\frac{1}{s_r},0,\cdots,0\right)Q*$$

$$=M^+ \text{ selon la proposition VIII.27.}$$

9° PROBLÈME

1° Question

Soit $M\in\mathcal{M}_{n,\,p}(\mathbb{C})$ de rang r. Selon le corollaire VI.47, $M=QDP*$, avec $Q\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $P\in\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ unitaires et $D=\left(\begin{array}{c|c}Diag(s_1,\cdots,s_r) & Z_{r,\,p-r}\\ \hline Z_{n-r,r} & Z_{n-r,\,p-r}\end{array}\right)$

($Z_{l,k}$ désignant la matrice nulle à l lignes et k colonnes).

Comme les valeurs singulières $s_1,\cdots,s_r$ sont strictement positives, on peut écrire :

$$D=\left(\frac{Diag\left(\sqrt{s_1},\cdots,\sqrt{s_r}\right)}{Z_{n-r,r}}\right)\left(Diag\left(\sqrt{s_1},\cdots,\sqrt{s_r}\right)\ \middle|\ Z_{r,\,p-r}\right)$$

Et en posant :

$$A=Q\left(\frac{Diag\left(\sqrt{s_1},\cdots,\sqrt{s_r}\right)}{Z_{n-r,r}}\right),\ B=\left(Diag\left(\sqrt{s_1},\cdots,\sqrt{s_r}\right)\ \middle|\ Z_{r,\,p-r}\right)P^*,$$

On obtient les deux matrices requises.

2° Question

$A^*A\in\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$. Elle est de même rang r que A (corollaire VI.5), elle est donc inversible. Le même raisonnement vaut pour BB^*.

3° Question

Si on pose, $M'=B^*(BB^*)^{-1}(A^*A)^{-1}A^*$:

1) $MM'=A\underbrace{BB^*(BB^*)^{-1}}_{=I}(A^*A)^{-1}A^*=A(A^*A)^{-1}A^*$.

Et $(MM')^*=MM'$

2) $MM'M=A\underbrace{(A^*A)^{-1}A^*A}_{=I}B=AB=M$

3) $M'M=B^*(BB^*)^{-1}\underbrace{(A^*A)^{-1}A^*A}_{=I}B=B^*(BB^*)^{-1}B$

Et $(M'M)^*=M'M$

4)

$M'M\,M'=B^*(BB^*)^{-1}\underbrace{BB^*(BB^*)^{-1}}_{=I}(A^*A)^{-1}A^*=B^*(BB^*)^{-1}(A^*A)^{-1}A^*=M'$

M' passe donc avec succès les tests de qualification d'inverse de Moore-Penrose.

4° Question

```
> M:=matrix([[1, -2, -1, 0], [1, -1, 0, 0], [1, 0, 1, 0]]);
```

$$M:=\begin{bmatrix}1 & -2 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

```
> rank(M);
```

$$2$$

```
> A:=matrix([[1, 0], [1, 1], [1, 2]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> B:=matrix([[1, -2, -1, 0], [0, 1, 1, 0]]);
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> multiply(A,B);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> Aa:=inverse(multiply(transpose(A),A));
```

$$Aa := \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

```
> Bb:=inverse(multiply(B,transpose(B)));
```

$$Bb := \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> Mplus:=multiply(transpose(B),Bb,Aa,transpose(A));
```

$$Mplus := \begin{bmatrix} \frac{1}{18} & \frac{2}{9} & \frac{7}{18} \\ \frac{-5}{18} & \frac{-1}{9} & \frac{1}{18} \\ \frac{-2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

10° PROBLÈME

1° Question

Selon la proposition VI.3, $Im(f^*)$ et $Ker(f)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E. Tout x de E se décompose : $x = \underbrace{x_1}_{\in Im(f^*)} + \underbrace{x_0}_{\in Ker(f)}$.

et d'après Pythagore : $\|x\|_2^2 = \|x_1\|_2^2 + \|x_0\|_2^2$.

Par ailleurs $f(x) = f(x_1)$. Comme f est une isométrie partielle et que $x_1 \in Im(f^*)$: $\|f(x)\|_2^2 = \|f(x_1)\|_2^2 = \langle f(x_1) ; f(x_1) \rangle = \langle x_1 ; x_1 \rangle = \|x_1\|_2^2$.

On a donc :

$\|x\|_2^2 = \|f(x)\|_2^2 + \|x_0\|_2^2$

D'où l'inégalité : $\|f(x)\|_2 \leq \|x\|$. L'égalité est obtenue si et seulement si $x_0 = 0$, autrement dit si et seulement si $x \in Im(f^*)$.

2° Question

D'après la proposition VI.5, f et f^* sont de même rang, donc $Im(f^*)$ est de dimension r $(r<n)$ Comme $Im(f^*)$ et $Ker(f)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E, on peut donc choisir une base orthonormale $(e_1,\cdots,e_r)$ de $Im(f^*)$, et une base orthonormale $(e_{r+1},\cdots,e_n)$ de $Ker(f)$ de sorte que $(e_1,\cdots,e_r,e_{r+1},\cdots,e_n)$ soit une base orthonormale de $E=Im(f^*)\oplus Ker(f)$. Comme $e_1,\cdots,e_r\in Im(f^*)$ et que f conserve le produit scalaire sur $Im(f^*)$, $(f(e_1),\cdots,f(e_r))$ est une liste orthonormale de F et par construction $Ker(f)=Vec(e_{r+1},\cdots,e_n)$. Dans cette base $(e_1,\cdots,e_r,e_{r+1},\cdots,e_n)$, f a une matrice du genre : $\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} \\ p\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right. & \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$, les r premières colonnes étant orthonormales.

3° Question

f isométrie partielle $\Leftrightarrow \forall u,v\in Im(f^*):\langle f(u);f(v)\rangle=\langle u;v\rangle$

$$\Leftrightarrow \forall y,z\in F:\langle f(f^*(y));f(f^*(z))\rangle=\langle f^*(y);f^*(z)\rangle$$
$$\Leftrightarrow \forall y,z\in F:\langle ff^*ff^*(y);z\rangle=\langle ff^*(y);z\rangle$$
$$\Leftrightarrow \forall y,z\in F:\langle ff^*ff^*(y)-ff^*(y);z\rangle=0$$
$$\Leftrightarrow \forall y\in F: ff^*ff^*(y)-ff^*(y)=0$$
$$\Leftrightarrow ff^*ff^*=ff^*.$$

4° Question

1) $ff^*ff^*=ff^*$ montre que ff^* est une projection (sur F). Comme de plus $(ff^*)^*=ff^*$ il s'agit d'une projection orthogonale.

2) $ff^*ff^*=ff^*$ et $Im(f^*ff^*)\subseteq Im(f^*)$ implique selon le corollaire VI.4, en échangeant les rôles de f et f^* : $f^*ff^*=f^*$.

3) $f^*ff^*=f^*\Rightarrow f^*ff^*f=f^*f$ ce qui montre, selon la 3° question, que f^* est une isométrie partielle.

4) et 5) : même démarche qu'en 1) et 2) en échangeant le rôle de f et f^*.

En résumé, si f est une isométrie partielle, $f^*=f^+$. Et dans ce cas :

- ✓ ff^* est la projection orthogonale de E sur $Im(f)=Im(ff^*)$.

- ✓ f^*f est la projection orthogonale de F sur $Im(f^*) = Im(f^*f)$.

5° Question

Si $f^* = f^+$, alors $f\,f^*f\,f^* = f\,f^+f\,f^+ = f\,f^+ = f\,f^*$. Donc, d'après la 3° question, f est une isométrie partielle.

6° Question

Si $f(x) = l\,x$,

on a d'une part : $\langle f(x)\,;\, f(x)\rangle = \langle l\,x\,;\, l\,x\rangle = l\,\bar{l}\,\langle x\,;\,x\rangle = |l|^2\,\|x\|_2^2$,

et d'autre part : $\langle f(x)\,;\, f(x)\rangle = \langle f^*f(x)\,;\,x\rangle$.

Comme f^*f est une projection orthogonale : $\langle f^*f(x)\,;\,x\rangle = \|f^*f(x)\|_2^2$.

D'où : $|l|^2\,\|x\|_2^2 = \|f^*f(x)\|_2^2 \Rightarrow |l| = \dfrac{\|f^*f(x)\|_2}{\|x\|_2}$.

Comme f^*f est une projection orthogonale : $\|f^*f(x)\|_2 \le \|x\|_2$, et donc $|l| \in [0,1]$.

CHAPITRE IX

PETITES QUESTIONS POUR FAIRE LE POINT

1. Non, pas nécessairement ! Ce sont deux notions de nature différentes. Exemple : $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ est définie positive.

2. Non plus ! Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ a pour valeurs propres –1 et 3 et n'est pas définie positive.

3. $Spec(A)=\{1,1+i,1-i\}$ est impossible car $r(A)=\sqrt{2}$ n'est pas valeur propre.
$Spec(A)=\{2,-2,1\}$ est impossible car il existerait alors 2 valeurs propres distinctes de module $r(A)=2$.
Voir théorème de Perron IX.6.

4. Non : A serait cyclique de période 2 et $Spec(A)$ devrait alors être invariant par : $x\mapsto -x$, ce qui n'est pas le cas (cf. proposition IX.17).

5. Non : si elle est irréductible, $r(A)>0$ est valeur propre (théorème de Frobenius IX.16). Or une matrice nilpotente n'admet que 0 comme valeur propre (proposition V.17).

6. Pas nécessairement. Exemple : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est positive, mais comme elle est nilpotente, elle n'est pas diagonalisable.

7. Non $r(A)=2$ est valeur propre double. Contradiction avec le théorème de Perron IX.6 si $A\gg 0$ et ave le théorème de Frobenius IX.16 dans le cas irréductible.

8. Non pour la première, oui pour les deux suivantes et non pour la dernière.

9. Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Non pas nécessairement : Si A est productive avec $r(A) = \frac{1}{2}$, $r(2A) = 1$, ce qui, selon la proposition IX.24, ruine les espérances de productivité de $2A$.

11. Non pour la première : $s_1 = 1$.
Non pour la seconde : $s_2 = 0$.
Oui pour la dernière.

1° EXERCICE

Les deux matrices A et B ne diffèrent que par les valeurs sur la diagonale. Or celles ci sont sans influence sur l'accessibilité d'un sommet à partir d'un autre… En terme de graphe, les graphes associés à A et B ne diffèrent que par les boucles sue les sommets. Donc si l'un est fortement connexe, l'autre aussi et… vice-versa.

2° EXERCICE

1° Question

Notons $a_{i,j}$ le terme ligne i colonne j de A et $b_{i,j}$ le terme ligne i colonne j de B. Comme $AA^{-1} = I$, pour $i \neq j$, $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = 0$. Or tous les $a_{i,k}$ sont strictement positifs et un au moins des $b_{k,j}$ est différent de 0 (sinon A^{-1} affublée d'une colonne nulle ne serait pas inversible). $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = 0$ impose alors qu'un des $b_{k,j}$ soit strictement négatif.

2° Question

Oui, par exemple si A est une matrice diagonale à termes strictement positifs, A^{-1} aussi.

3° EXERCICE

Si $Spec(A) = \{ l_1, l_2 \cdots, l_p \}$ avec $l_1 = r(A)$, alors selon la proposition V.3 : $Spec(A+I) = \{ l_1 + 1, l_2 + 1, \cdots, l_p + 1 \}$.

Pour $i = 2 \cdots p$: $l_1 = r(A) \geq |l_i| \Rightarrow l_1 + 1 \geq |l_i| + 1 \Rightarrow l_1 + 1 \geq |l_i + 1|$.

Comme $l_1 + 1 \in Spec(A+I)$, il en résulte que $r(A+I) = l_1 + 1 = r(A) + 1$.

4° EXERCICE

Le corollaire IX.4 stipule, pour une matrice positive A :

$$\min_i L_i \leq r(A) \leq \max_i L_i \text{ où } L_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$$

Or la condition indique que tous les L_i sont égaux à a. Par conséquent $\min_i L_i = \max_i L_i = a$ et donc $r(A) = a$.

5° EXERCICE

1° Question

Pour que le graphe associé à la matrice soit fortement connexe, il faut au moins n fléches pour relier les n sommets. Donc si $k < n$, c'est sans espoir…

2° Question

Une matrice de permutation circulaire comme :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

fournit un tel exemple.

6° EXERCICE

1° Question

Soit l'hypothèse de récurrence $\mathcal{H}_k : 0 \le A^k \le B^k$.

$\mathcal{H}_1$ est vraie.

$\mathcal{H}_k \Rightarrow \mathcal{H}_{k+1}$:

Comme $A^{k+1} = A^k A$:

$$\left(A^{k+1}\right)_{i,j} = \sum_{l=1}^{n} \left(A^k\right)_{i,l} a_{l,j} \quad \left(B^{k+1}\right)_{i,j} = \sum_{l=1}^{n} \left(B^k\right)_{i,l} b_{l,j}$$

Comme $0 < A < B$, pour tout $i, j = 1 \cdots n : 0 \le a_{i,j} \le b_{i,j}$.

Selon $\mathcal{H}_k$, pour tout $i, j = 1 \cdots n : 0 \le \left(A^k\right)_{i,j} \le \left(B^k\right)_{i,j}$.

Donc, pour tout $i, j = 1 \cdots n : 0 \le \left(A^{k+1}\right)_{i,j} \le \left(B^{k+1}\right)_{i,j}$.

Autrement dit : $0 \le A^{k+1} \le B^{k+1}$.

Remarque : l'inégalité < entre les matrices A et B peut se transfomer en $\le$ *pour leurs puissances. Par exemple :*

$$0 < \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme (pour tout $k > 0$) $0 \le A^k \le B^k$, la somme de chaque colonne de A^k est inférieure à la somme de la colonne correspondante de B^k. Or pour des matrices à termes positifs ou nuls, la norme $\| \ \|_1$ est égale au maximum de ces sommes (proposition VII.3). Par conséquent : $\|A^k\|_1 \leq \|B^k\|_1$.

Par application de la proposition VII.13 qui vaut pour toute norme matricielle : $\lim_{k\to+\infty} \|A^k\|_1^{\frac{1}{k}} \leq \lim_{k\to+\infty} \|B^k\|_1^{\frac{1}{k}} \Rightarrow r(A) \leq r(B)$.

2° Question

$$\tilde{A}_i = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i-1} & 0 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,i-1} & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & & \vdots & a_{i+1,i+1} & \cdots & \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & & 0 & & & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$Det(\tilde{A}_i - l\,I) = \begin{vmatrix} a_{1,1}-l & \cdots & a_{1,i-1} & 0 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,i-1}-l & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & -l & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & & \vdots & a_{i+1,i+1}-l & \cdots & \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & & 0 & & & a_{n,n}-l \end{vmatrix}$$

En développant suivant la ligne i :

$$Det(\tilde{A}_i - l\,I) = -l \begin{vmatrix} a_{1,1}-l & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,i-1}-l & & & \\ a_{i+1,1} & \cdots & & a_{i+1,i+1}-l & \cdots & \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & & & & a_{n,n}-l \end{vmatrix}$$

$$Det(\tilde{A}_i - l\,I) = -l\, Det(A_i - l\,I)$$

Par conséquent $Spec(\tilde{A}_i) = Spec(A_i) \cup \{0\}$ et $r(\tilde{A}_i) = r(A_i)$.

Comme $\tilde{A}_i \leq A$. On a donc : $r(\tilde{A}_i) = r(A_i) \leq r(A)$.

7° EXERCICE

Le fait qu'une matrice positive soit irréductible (resp. primitive) ne dépend pas de la valeur précise de ses termes mais uniquement du fait qu'ils sont nuls ou strictement positifs. Les deux matrices A et B ayant leurs termes nuls aux mêmes emplacements, les deux équivalences s'en suivent.

8° EXERCICE

$$B=\begin{pmatrix} 0 & a_{2,1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

B et A ne diffèrent que par les termes de la diagonale. Selon le premier exercice, l'irréductibilité de A implique l'irréductibilité de B.

Comme les termes de la diagonale de A son strictement positifs, $a>0$ et $\frac{1}{a}B$ est aussi irréductible.

Alors, selon la proposition IX.14, $\left(I+\frac{1}{a}B\right)^{n-1} \gg 0$. Et selon la proposition IX.21 $I+\frac{1}{a}B$ est primitive.

Or $I+\frac{1}{a}B=\begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{2,1}}{a} & \cdots & \frac{a_{1,n}}{a} \\ \frac{a_{2,1}}{a} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{a_{n-1,n}}{a} \\ \frac{a_{n,1}}{a} & \cdots & \frac{a_{n,n-1}}{a} & 1 \end{pmatrix}$ et A ont leur termes nuls aux mêmes emplacements. Et selon l'exercice précédent A est primitive.

9° EXERCICE

1° Question

Comme les b_i et les c_i sont strictement positifs le graphe de M_n contient les flèches suivantes :

$$e_1 \rightleftarrows e_2 \qquad \ldots\ldots \qquad e_{n-} \rightleftarrows e_n$$

graphe manifestement fortement connexe…

2° Question

Si un des a_i est strictement positif, la proposition IX.22 permet de conclure. Mais ce n'est malheureusement pas écrit dans l'énoncé.

10° PROBLÈME

1° Question

A et A^t sont toutes deux strictement positives. Il existe donc (théorème IX.6 de Perron) un vecteur propre $U' \gg 0$ de A et un vecteur propre $V' \gg 0$ de A^t associés à leur valeur propre commune $r(A) = r(A^t)$. $U'^t V'$ est alors un réel strictement positif a. En posant $U = \frac{1}{\sqrt{a}} U'$ et $V = \frac{1}{\sqrt{a}} V'$ on obtient les deux vecteurs vérifiant : $U^t V = 1 \Leftrightarrow V^t U = 1$.

Dans ces conditions, en posant : $B = A - r(A) U V^t$:

$$UV^t B = UV^t (A - r(A) U V^t) = UV^t A - r(A) U \underbrace{V^t U}_{=1} V^t = U(\underbrace{A^t V}_{=r(A)V})^t - r(A) U V^t$$

$$= r(A) U V^t - r(A) U V^t = 0$$

2° Question

Soit $BW = lW$ avec $l \neq 0$. Alors :

$$\underbrace{UV^t B}_{=0} W = l UV^t W \Rightarrow 0 = l UV^t W \Rightarrow UV^t W = 0.$$

D'où : $AW = (B + r(A) U V^t) W = BW + r(A) \underbrace{UV^t W}_{=0} = lW$.

3° Question

Supposons $r(A)$ valeur propre de B associée à un vecteur propre W. Comme $r(A) > 0$, la deuxième question assure que W est aussi vecteur propre de A associé à $r(A)$. D'après le théorème IX.6 de Perron, le sous espace propre de A associé à $r(A)$ est de dimension 1. Et comme U est aussi vecteur propre de A associé à $r(A)$, $W = aU$ $(a \neq 0)$. On aurait alors :

$$BW = r(A) W \Rightarrow BU = r(A) U \Rightarrow (A - r(A) U V^t) U = r(A) U$$

$$\Rightarrow AU - r(A) U \underbrace{V^t U}_{=1} = r(A) U \Rightarrow r(A) U - r(A) U = r(A) U$$

$$\Rightarrow r(A) U = 0$$

Ce qui est manifestement impossible.

Donc $r(A) \notin Spec(B)$

Pour résumer les questions 2° et 3° : $Spec(B) - \{0\} \subset Spec(A)$.

Mais, attention, de cette inclusion stricte, on peut seulement déduire : $r(B) \leq r(A)$. Rien n'exclut, à priori, que B posséde une valeur propre $l \neq r(A)$ et de module $r(A)$. Mais dans ce cas, l étant non nulle serait

aussi, selon la 2° question, valeur propre de A. A posséderait alors une valeur propre $l \neq r(A)$ et de module $r(A)$, en contradiction avec le 3) du théorème IX.6 de Perron.
Donc, finalement : $r(B) < r(A)$.

4° Question

Soit l'hypothèse de récurrence $\mathcal{H}_k : B^k = A^k - r(A)^k UV^t$.
$\mathcal{H}_1$ est vraie.
$\mathcal{H}_k \Rightarrow \mathcal{H}_{k+1}$:

$$B^k = A^k - r(A)^k UV^t \Rightarrow B^{k+1} = (A^k - r(A)^k UV^t)B \Rightarrow B^{k+1} = A^k B - r(A)^k \underbrace{UV^t B}_{=0}$$

$$\Rightarrow B^{k+1} = A^k(A - r(A)UV^t) \Rightarrow B^{k+1} = A^{k+1} - r(A)A^k UV^t$$

Or U, vecteur propre de A associé à $r(A)$, est aussi vecteur propre de A^k associé à $r(A)^k$, autrement dit $A^k U = r(A)^k U$. Et finalement :

$$B^{k+1} = A^{k+1} - r(A)^{k+1} UV^t$$

$$B^k = A^k - r(A)^k UV^t \Rightarrow \frac{1}{r(A)^k} B^k = \frac{1}{r(A)^k} A^k - UV^t .$$

Comme $r(B) < r(A)$, $\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{1}{r(A)^k} B^k = 0$. Donc $\lim\limits_{k \to +\infty} \left(\frac{1}{r(A)} A \right)^k = UV^t$.

5° Question

Sous l'hypothèse, plus large, A irréductible, en se fondant sur le thèorème IX.16 de Frobenius au lieu du théorème IX.6 de Perron , tout se passe sans modification jusqu'à la fin de la question 3°. Le raisonnement effectué pour montrer que B ne posséde pas de valeurs propres $l \neq r(A)$ et de module $r(A)$ est en échec si la matrice irréducible A est cyclique de période p. Elle aura alors p valeurs propres de modules $r(A)$ (définition IX.19). Si par contre A est primitive, le raisonnement est valide et, dans ce cas, on aboutit à la même conclusion que dans le cas A strictement positive :

$$\lim_{k \to +\infty} \left(\frac{1}{r(A)} A \right)^k = UV^t$$

variante du lemme IX.20.

11° EXERCICE

Si A est productive, la proposition IX.24 indique que $r(A) < 1$ et le théorème V.26 permet de conclure $\lim\limits_{t \to +\infty} A^t = 0$.

Réciproquement, si $\underset{t\to+\infty}{Lim} A^t = 0$, le même théorème V.26 indique que $r(A) < 1$. Il suffit alors de reprendre le 2) de la démonstration de IX.25 pour conclure : $I - A$ inversible et $(I - A)^{-1} > 0$ ce qui garantit la productivité de *A*.

12° EXERCICE

Si la somme de chacune des colonnes est strictement inférieure à 1, on a : $\|A\|_1 = \max_j C_j < 1$ (proposition VII.3). Donc, selon la proposition VII.10 $r(A) < 1$ et l'exercice précédent permet de conclure.

Même raisonnement avec les lignes, en remplaçant $\|\ \|_1$ par $\|\ \|_\infty$.

13° EXERCICE

$r(aA) = a\,r(A)$. Selon l'exercice 11, aA est productive si et seulement si $a\,r(A) < 1 \Leftrightarrow a < \dfrac{1}{r(A)}$.

14° EXERCICE

1° Question

```
> A:=matrix([[1/4, 0, 1/8, 1/6], [1/4, 1/6, 1/8, 0], [0, 1/3, 0, 1/3],
[1/2, 0, 1/4, 1/6]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

```
> norm(A,infinity);
```

$$\frac{11}{12}$$

Donc : $r(A) \le \|A\|_\infty < 1$ et A est productive, ce que confirme :

```
> B:=inverse(diag(1,1,1,1)-A);
```

$$B := \begin{bmatrix} \frac{17}{10} & \frac{7}{50} & \frac{7}{20} & \frac{12}{25} \\ \frac{3}{5} & \frac{33}{25} & \frac{3}{10} & \frac{6}{25} \\ \frac{3}{5} & \frac{13}{25} & \frac{13}{10} & \frac{16}{25} \\ \frac{6}{5} & \frac{6}{25} & \frac{3}{5} & \frac{42}{25} \end{bmatrix}$$

2° Question

```
> Z:=matrix([[500], [500], [500], [500]]);
```

$$Z := \begin{bmatrix} 500 \\ 500 \\ 500 \\ 500 \end{bmatrix}$$

Le vecteur de production brute X permettant de satisfaire la consommation finale Z est donnée par : $X = (I - A)^{-1} Z$

```
> X:=multiply(B,Z);
```

$$X := \begin{bmatrix} 1335 \\ 1230 \\ 1530 \\ 1860 \end{bmatrix}$$

3° Question

```
> eigenvalues(A);
```

$$0, \frac{2}{3}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{6}$$

Donc $r(A) = \dfrac{2}{3}$

```
> eigenvectors(A);
```

$$\left[\frac{1}{6}, 1, \{[1, -2, -2, 1]\}\right], \left[\frac{-1}{4}, 1, \{[1, 3, -12, 6]\}\right], \left[\frac{2}{3}, 1, \left\{\left[\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}\right]\right\}\right], [0, 1, \{[1, 0, -2, 0]\}]$$

Comme vecteur de production brute, on choisit un vecteur propre de A associé à $r(A) = \dfrac{2}{3}$, par exemple :

```
> X:=matrix([[500], [400], [600], [800]]);
```

$$X := \begin{bmatrix} 500 \\ 400 \\ 600 \\ 800 \end{bmatrix}$$

La consommation intermédiaire est AX :

```
> multiply(A,X);
```

$$\begin{bmatrix} 300 \\ 240 \\ 360 \\ 480 \end{bmatrix}$$

Et la consommation finale est $Z = X - AX$:

```
> Z:=evalm(X-multiply(A,X));
```

$$Z := \begin{bmatrix} 150 \\ 120 \\ 180 \\ 240 \end{bmatrix}$$

15° EXERCICE

1° Question

En reportant : $X_t = (1+a)^t X_0$ et $Z_t = (1+a)^t Z_0$ dans : $X_{t-1} = Z_t + AX_t$:

$(1+a)^{t-1} X_0 = (1+a)^t Z_0 + (1+a)^t AX_0 \Leftrightarrow X_0 = (1+a)Z_0 + (1+a)AX_0$

$\Leftrightarrow (1+a)Z_0 = \left(I - (1+a)A\right)X_0$

2° Question

Si la matrice $(1+a)A$ est productive, alors $\left(I-(1+a)A\right)^{-1}$ existe et est positive. Donc pour tout $Z_0 \gg 0$, $\left(I-(1+a)A\right)^{-1} Z_0 \gg 0$ (voir proposition IX.25). En posant $X_0 = (1+a)\left(I-(1+a)A\right)^{-1} Z_0$, on alors :

$(1+a)Z_0 = \left(I - (1+a)A\right)X_0$

Dans ce cas : $r\left((1+a)A\right) < 1 \Leftrightarrow (1+a)\,r(A) < 1 \Leftrightarrow a < \dfrac{1}{r(A)} - 1$

16° EXERCICE

- ✓ $r_n > 0$ donc L est de rang n (proposition IX.28) et est irréductible (proposition IX.29).
- ✓ Pour $i = 1 \cdots n$, $r_i > 0$, elle est primitive (corollaire IX.33).
- ✓ La somme C_j des termes de la colonne j est égale à 1. Donc selon le corollaire IX.4 : $r(L) = 1$.
- ✓ 1 est valeur propre simple de L et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ s_1 \\ s_1 s_2 \\ \vdots \\ s_1 s_2 \cdots s_{n-1} \end{pmatrix}$ est vecteur propre strictement positif associé à 1 (corollaire IX.31). En terme d'évolution, ce

vecteur propre V (où tout vecteur stictement positif colinéaire) est une population stable en effectif et en répartition.

✓ $\underset{t\to+\infty}{Lim}\, L^t = P$ où P désigne une matrice de projection sur le sous_espace propre $E_1 = Vec(V)$ (lemme IX.20). À partir d'une population initiale quelconque $X_0 > 0$, alors $\underset{t\to+\infty}{Lim}\, X_t = \underset{t\to+\infty}{Lim} L^t X_0 = PX_0 \in Vec(V)$. Autrement dit, quelque soit la population initiale, on observe une convergence vers une population stable.

Remarque : cette matrice de Leslie est aussi une matice stochastique ce qui anticipe sur le prochain chapitre…

17° EXERCICE

Si $r_n > 0$, L est de rang n (proposition IX.28) donc inversible et alors

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{s_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{s_{n-1}} \\ \frac{1}{r_n} & -\frac{r_1}{s_1 r_n} & -\frac{r_2}{s_2 r_n} & \cdots & -\frac{r_{n-1}}{s_{n-1} r_n} \end{pmatrix}$$

Le plus simple pour le montrer est d'inverser le système :

$$\begin{cases} x_1(t+1) = r_1 x_1(t) + r_2 x_2(t) + \cdots + r_n x_n(t) \\ x_2(t+1) = s_1 x_1(t) \\ \quad\vdots \\ x_n(t+1) = s_{n-1} x_{n-1}(t) \end{cases}$$

CHAPITRE X

PETITES QUESTIONS POUR FAIRE LE POINT

1. Non puisque son rayon spectral est 1.

2. Oui. Mais dans ce cas, elle possède deux valeurs propres de module $\rho(M)=1$. Elle n'est donc pas ergodique.

3. Non : si W est un vecteur propre associé à $\lambda=\frac{1}{2}$, la proposition X.5 indique que la somme des termes de W est nulle.

4. Non : la matrice nulle n'a rien de stochastique !

5. Non : si M est productive $\rho(M)<1$ (proposition IX.24) ; si M est stochastique $\rho(M)=1$ (proposition X.4).

6. La proposition X.4 apporte une réponse positive à la première assertion. Pour la deuxième assertion, si la matrice est ergodique, la convergence est assurée sinon…

7.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

8. M est une matrice de permutation donc irréductible. Ses valeurs propres sont : $1, e^{\frac{2\pi}{3}i}, e^{-\frac{2\pi}{3}i}$. Elle est cyclique de période 3, pas ergodique.

9. Oui si elle est irréductible primitive. Exemple : $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$

10. Elle a deux valeurs propres de module 1 et ne peut être ergodique. Si elle était irréductible, elle serait cyclique de période 2. Mais dans ce cas $Spec(M)$ devrait être invariant sous $x \mapsto -x$, ce qui n'est manifestement pas le cas.

1° EXERCICE

1° Question

$M=\begin{pmatrix} p & 1-q \\ 1-p & q \end{pmatrix}$ $C_M(X)=X^2-(p+q)X+p+q-1$. Les valeurs propres sont $l_1=1$ et $l_2=p+q-1$.

Si $p=q=1$, $M=I$. Sinon elles sont distinctes et M est diagonalisable.

2° Question

La matrice $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est stochastique.0 est valeur propre double et $E_0=Ker(M)$ est de dimension 1. Elle n’est donc pas diagonalisable.

2° EXERCICE

M stochastique équivaut à : $0<M$ et $U^tM=U^t$ (proposition X.2)

Si les a_i sont positifs ou nuls et vérifient $\sum_{i=1}^{k} a_i=1$ et si les M_i sont stochastiques : :

- ✓ $\sum_{i=1}^{k} a_i M_i > 0$
- ✓ $U^t \sum_{i=1}^{k} a_i M_i = \sum_{i=1}^{k} a_i \underbrace{U^t M_i}_{=U^t} = \sum_{i=1}^{k} a_i U^t = \left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right) U^t = U^t$.

$\sum_{i=1}^{k} a_i M_i$ est donc stochastique.

3° EXERCICE

1° Question

Si l’on exclut le cas $p=1$ où $A_n=I_n$ (on ne bouge pas !), le graphe associé est fortement connexe. donc A_n est irréductible. Si $p\neq 0$, $Tr(A_n)\neq 0$ donc selon la proposition IX.22 A_n est primitive donc ergodique.

Le cas $p=0$ sera traité à la fin.

2° Question

A_n est symétrique, ce qui renvoie au théorème spectral: A_n est diagonalisable avec toutes ses valeurs propres réelles… Mais aussi circulante, ce qui renvoie au paragraphe du chapitre V qui leurs est consacré :

En posant : $M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A_n = pI + \frac{\overline{p}}{2} M_n + \frac{\overline{p}}{2} M_n^{n-1}$.

Autrement dit : $A_n = P(M_n)$ avec $P(X) == p + \frac{\overline{p}}{2} X + \frac{\overline{p}}{2} X^{n-1}$.

Si on note : $w = e^{\frac{2p}{n} i}$, les valeurs propres de A_n sont :

$$P(1) = 1, P(w), \cdots, P(w^{n-1})$$

Pour $k = 0 \cdots n-1$,

$$P(w^k) = p + \frac{\overline{p}}{2} w^k + \frac{\overline{p}}{2} w^{k(n-1)} = p + \frac{\overline{p}}{2} w^k + \frac{\overline{p}}{2} w^{-k} = p + \frac{\overline{p}}{2}\left(w^k + \overline{w^k}\right)$$

$$= p + \overline{p}\,\mathrm{Re}(w^k) = p + \overline{p}\cos\left(k\frac{2p}{n}\right)$$

Ce calcul confirme que les valeurs propres sont réelles. Par ailleurs pour $k = 1 \cdots n-1$, elles appartiennent à l'intervalle $]-1;1[$. $P(1) = 1$ est bien la seule valeur propre de module 1.

De plus $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à $P(1) = 1$ donc $\mathrm{p}_{A_n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix}$ est l'unique vecteur de probabilité invariant. Quelque soit la position initiale la probabilité à long terme de se trouver en tel ou tel point est la même. Décidémment, on tourne en rond…

Retour sur le cas $p = 0$ (saut obligatoire à droite ou à gauche).

Dans ce cas, pour $k = 0 \cdots n-1$ $P(w^k) = \cos\left(k\frac{2p}{n}\right)$. Si n est pair, pour $k = \frac{n}{2}$, $P(w^k) = -1$ ce qui donne une deuxième valeur propre de module 1 et l'ergodicité s'évanouit. Si Si n est impair, 1 est la seule valeur propre de module 1 donc l'ergocité est satisfaite.

4° PROBLÈME

1° Question

Si l'on exclut le cas $p=1$ où $B_n = I_n$ (on ne bouge pas !), le graphe associé est fortement connexe. donc A_n est irréductible. Si $p \neq 0$, $Tr(B_n) \neq 0$ donc selon la proposition IX.22 B_n est primtive donc ergodique.

2° Question

B_n est une matrice bande du type traité au paragraphe 5 du chapitre VI (on peut aussi se référer à l'exercice IX.9).
Il suffit, dès lors, de se référer aux propositions VI.5 et VI.37 qui indiquent :

- ✓ que toutes les valeurs propres sont réelles,
- ✓ qu'elles vérifient : $l_n(B_n) < l_{n-1}(B_n) < \cdots < l_2(B_n) < \underbrace{l_1(B_n)}_{=r(B_n)=1}$.

3° Question

La somme des termes de p est égale à 1 et :

$$B_n \mathrm{p} = \frac{1}{2(n-1)} \begin{pmatrix} p & \frac{\overline{p}}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \overline{p} & p & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{\overline{p}}{2} & \ddots & \frac{\overline{p}}{2} & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & p & \overline{p} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\overline{p}}{2} & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2(n-1)} \begin{pmatrix} p+\overline{p} \\ \overline{p}+2p+\overline{p} \\ \overline{p}+2p+\overline{p} \\ \vdots \\ \overline{p}+2p+\overline{p} \\ \overline{p}+2p+\overline{p} \\ \overline{p}+p \end{pmatrix} = \mathrm{p}$$

À long terme, la probabilité d'atterrir aux extrémités du segment est deux fois plus faible qu'ailleurs.

4° Question

$$M_n = \begin{pmatrix} p & \frac{\overline{p}}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \overline{p} & p & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{\overline{p}}{2} & \ddots & \frac{\overline{p}}{2} & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & p & \boxed{\frac{\overline{p}}{2}} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\overline{p}}{2} & p \end{pmatrix}$$

Selon et avec les notations de la proposition VI.36, pour $n \geq 4$:

$$C_n(X) = (a_n - X)C_{n-1}(X) - b_{n-1}c_{n-1}C_{n-2}(X)$$

Ce qui se transcrit avec les notations du problème :

$$C_{M_n}(X) = (p - X)\, C_{M_{n-1}}(X) - \frac{\overline{p}^2}{4} C_{M_{n-2}}(X)$$

Par ailleurs :

$$C_{M_2}(X) = (p - X)^2 - \frac{\overline{p}^2}{2}$$

$$C_{M_3}(X) = (p - X)\left((p - X)^2 - \frac{3\overline{p}^2}{4} \right)$$

5° Question

Pour $2p - 1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow -\overline{p} \leq p - x \leq \overline{p}$, on pose $p - x = \overline{p}\cos q$.

$$C_{M_2}(x) = (p - x)^2 - \frac{\overline{p}^2}{2} = \overline{p}^2\cos^2 q - \frac{\overline{p}^2}{2} = \frac{\overline{p}^2}{2}(2\cos^2 q - 1) = \frac{\overline{p}^2}{2}\cos 2q$$

$$C_{M_3}(x) = (p - x)\left((p - X)^2 - \frac{3\overline{p}^2}{4} \right) = \overline{p}\cos q \left(\overline{p}^2\cos^2 q - \frac{3\overline{p}^2}{4} \right)$$

$$= \frac{\overline{p}^3}{4}\cos q\,(4\cos^2 q - 3) = \frac{\overline{p}^3}{4}\cos 3q$$

La formule $C_{M_n}(x) = \dfrac{\overline{p}^n}{2^{n-1}}\cos nq$ est donc bien vérifiée aux rangs 2 et 3.

Si on la suppose vérifiée aux rangs $n - 1$ et $n - 2$,

$$C_{M_n}(x) = (p - x)C_{M_{n-1}}(x) - \frac{\overline{p}^2}{4} C_{M_{n-2}}(x)$$

$$= \overline{p}\cos q\, \frac{\overline{p}^{n-1}}{2^{n-2}}\cos(n-1)q - \frac{\overline{p}^2}{4}\,\frac{\overline{p}^{n-2}}{2^{n-3}}\cos(n-2)q$$

$$= \frac{\overline{p}^n}{2^{n-1}}\left(\underbrace{2\cos q\,\cos(n-1)q}_{=\cos nq + \cos(n-2)q} - \cos(n-2)q \right) = \frac{\overline{p}^n}{2^{n-1}}\cos nq$$

ce qui est bien la formule au rang n.

6° Question

En développant $Det(B_n - xI)$ suivant la dernière colonne, on obtient :

$$C_{B_n}(x) = (p - x)C_{M_{n-1}}(x) - \frac{\overline{p}^2}{2} C_{M_{n-2}}(x)$$

La seule différence avec le développement de $Det(M_n - xI)$ est la substitition d'un facteur $\overline{p}$ à un facteur $\dfrac{\overline{p}}{2}$.

7° Question

$$C_{B_n}(x) = \overline{p}\cos q\,\frac{\overline{p}^{n-1}}{2^{n-2}}\cos(n-1)q - \frac{\overline{p}^2}{2}\frac{\overline{p}^{n-2}}{2^{n-3}}\cos(n-2)q$$

$$= \frac{\overline{p}^n}{2^{n-1}}\left(\underbrace{2\cos q\,\cos(n-1)q}_{=\cos nq+\cos(n-2)q} - 2\cos(n-2)q\right) = \frac{\overline{p}^n}{2^{n-1}}\left(\cos nq - \cos(n-2)q\right)$$

$$= -\frac{\overline{p}^n}{2^{n-2}}\sin q\,\sin(n-1)q$$

Pour $0 \le q \le p$, s’annule pour $q = \dfrac{kp}{n-1}$ où $k = 0\cdots n-1$, ce qui compte tenu de la relation : $p - x = \overline{p}\cos q \Leftrightarrow x = p - \overline{p}\cos q$ va nous fournir les n racines distinctes :

$$x_k = p - \overline{p}\cos\left(\frac{kp}{n-1}\right) \text{ où } k = 0\cdots n-1\,.$$

Les x_k sont énumérés par ordre croissant, avec en particulier :

$$x_0 = p - \overline{p} = 2p - 1 \quad x_{n-1} = p + \overline{p} = 1$$

Si l’on souhaite s’en tenir à la notation usuelle des valeurs propres réelles, il suffit de poser : $l_k(B_n) = p + \overline{p}\cos\left(\dfrac{(k-1)p}{n-1}\right)$ où $k = 1\cdots n$.

Retour sur le cas $p = 0$:

$l_n(B_n) = 2p - 1$. Donc si $p = 0$, -1 est valeur propre. B_n possèdant alors une deuxième valeur propre de module 1 n’est pas ergodique.

5° PROBLÈME

1° Question

Les probabilité de transition d’un état à l’autre sont :

- ✓ $P(E_1 / E_0) = 1$
- ✓ $P(E_{n-1} / E_n) = 1$
- ✓ et pour $i \notin \{0, n\}$ $P(E_{i-1} / E_i) = \dfrac{i}{n}$ $P(E_{i+1} / E_i) = \dfrac{n-i}{n}$

Ce qui conduit à la matrice de transition irréductible :

$$M=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \frac{n-1}{n} & \ddots & \frac{i}{n} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \frac{n-i}{n} & & \frac{n-1}{n} & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{n} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

S'agissant s'une matrice bande, analogue à celle rencontrée au problème précédent, les mêmes arguments s'appliquent :

- ✓ toutes les valeurs propres sont réelles,
- ✓ elles vérifient : $l_{n+1}(M) < l_n(M) < \cdots < l_2(M) < \underbrace{l_1(M)}_{=r(M)=1}$.

2° Question

L'exercice IV.11 montre que M est la matrice de Φ et que, pour $k = 0\cdots n$: $(X+1)^k (X-1)^{n-k}$ est vecteur propre de Φ assovié à la valeur propre $\frac{2k-n}{n}$.

Dans le but de ranger les valeurs propre dans l'ordre usuel, on pose $j = n-k+1$ et, pour $j = 1\cdots n+1$:

$(X+1)^{n+1-j}(X-1)^{j-1}$ est vecteur propre de Φ associé à $l_j(M) = \dfrac{n-2(j-1)}{n}$

Pour $j=1$, cela donne :

$l_1(M) = 1$ et $(X+1)^n$ vecteur propre. Donc en coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ C_n^i \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Comme $\sum_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n$, le vecteur de probabilité invariant est :

$$p_M = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ C_n^i \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$ ce qui correspond à une distribution binomiale.

Pour $j = n+1$, cela donne :

$l_{n+1}(M) = -1$ et $(X-1)^n$ vecteur propre. La matrice est cylique de période 2 , pas ergodique.

6° PROBLÈME

1° Question

Le fait que $\Pi = \underset{t \to +\infty}{Lim} M^t$ soit une matrice de projection découle de la proposition X.3 qui précise de plus que $Im(\Pi) = Vec(\pi)$.

$M\Pi = \underbrace{M\pi}_{=\pi} U^t = \pi U^t = \Pi$

$\Pi M = \pi \underbrace{U^t M}_{=U^t} = \pi U^t = \Pi$.

2° Question

$A = I - M$, $Ker(A) = Ker(I-M) = E_1$ le sous-espace propre de M associé à $r(M) = 1$. Comme M est ergodique $Dim(E_1) = 1$ et $E_1 = Vec(\pi)$.

Donc $Rg(A) = n-1$.

Soit $Y \in Im(A) \cap Ker(A)$:

$$\begin{cases} Y = AX \\ AY = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y = AX \\ Y \in E_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y = AX \\ Y = a\pi \end{cases} \Rightarrow AX = a\pi \Rightarrow X - MX = a\pi$$

$$\Rightarrow U^t X - \underbrace{U^t M}_{=U^t} X = a \underbrace{U^t \pi}_{=1} \Rightarrow 0 = a \Rightarrow Y = 0$$

$$Im(A) \cap Ker(A) = \{0\}$$

3° Question

$I - (M - \Pi) = A + \Pi$.

$X \in Ker(A+\Pi) \Leftrightarrow AX = -\Pi X$.

Or $AX \in Im(A)$ et $-\Pi X \in Vec(\pi) = E_1 = Ker(A)$.

Comme $Im(A) \cap Ker(A) = \{0\}$, $X = 0$ et $Ker(A+\Pi) = \{0\}$.

Pour tout entier $t \geq 1$:

$(M-\Pi)^t = (M-M\Pi)^t = M^t(I-\Pi)^t$.

Or Π est une projection et $I-\Pi$ aussi. Donc $(I-\Pi)^t = I-\Pi$. Et :

$(M-\Pi)^t = M^t(I-\Pi) = M^t - M^t\Pi$

Or $M\Pi = \Pi$, et par itération : $M^t\Pi = \Pi$.

Au final, on obtient :

$$(M-\Pi)^t = M^t - \Pi ,$$

avec comme conséquence :

$$\underset{t\to+\infty}{Lim}(M-\Pi)^t = \underset{t\to+\infty}{Lim} M^t - \Pi = 0 .$$

Si on se livre au calcul classique (voir, par exemple la démonstration de la proposition IX.25) :

$$\left(I-(M-\Pi)\right)\sum_{t=0}^{k}(M-\Pi)^t = I-(M-\Pi)^{k+1}$$

On en déduit par passage à la limite lorsque $k \to +\infty$:

$$\left(I-(M-\Pi)\right)\sum_{t=0}^{+\infty}(M-\Pi)^t = I$$

Autrement dit :

$$\left(I-(M-\Pi)\right)^{-1} = \sum_{t=0}^{+\infty}(M-\Pi)^t$$

ou encore :

$$\left(I-(M-\Pi)\right)^{-1} = \sum_{t=0}^{+\infty}(M-\Pi)^t = I + \sum_{t=1}^{+\infty}(M^t-\Pi) = \Pi + \sum_{t=0}^{+\infty}(M^t-\Pi)$$

4° Question

A vérifie $Im(A)\cap Ker(A) = \{0\}$, ce qui équivaut à $E = Im(A)\oplus Ker(A)$ et est précisémment une condition nécessaire et suffisante de l'existence d'une « generalized group inverse » $A^\#$ vérifiant :

$$AA^\#A = A$$

$$A^\#A\,A^\# = A^\#$$

$$AA^\# = A^\#A$$

Il reste à vérifier que $A^\# = Z-\Pi$ convient.

Comme remarques préalables :

$A\Pi = (I-M)\Pi = \Pi - M\Pi = 0$ et $\Pi A = \Pi(I-M) = \Pi - \Pi M = 0$

Comme $Z = (A+\Pi)^{-1}$:

$Z(A+\Pi) = I \Leftrightarrow ZA + Z\Pi = I$ et $(A+\Pi)Z = I \Leftrightarrow AZ + \Pi Z = I$.

$AA^{\#} = A(Z-\Pi) = AZ - \underbrace{A\Pi}_{=0} = I - \Pi Z$

$A^{\#}A = (Z-\Pi)A = ZA - \underbrace{\Pi A}_{=0} = I - Z\Pi$.

Or : $Z\Pi = \Pi Z = \Pi$. En effet :

$Z\Pi = \Pi \Leftrightarrow \Pi = Z^{-1}\Pi \Leftrightarrow \Pi = (A+\Pi)\Pi \Leftrightarrow \Pi = A\Pi + \Pi^2 \Leftrightarrow \Pi = \Pi$

$\Pi Z = \Pi \Leftrightarrow \Pi = \Pi Z^{-1} \Leftrightarrow \Pi = \Pi(A+\Pi) \Leftrightarrow \Pi = \Pi A + \Pi^2 \Leftrightarrow \Pi = \Pi$

$AA^{\#} = A^{\#}A = I - \Pi$ est donc établie.

Et pour finir :

$AA^{\#}A = (I-\Pi)A = A - \underbrace{\Pi A}_{=0} = A$

$A^{\#}AA^{\#} = (Z-\Pi)(I-\Pi) == Z - Z\Pi - \Pi + \Pi^2 = Z - \Pi - \Pi + \Pi = Z - \Pi = A^{\#}$.

7° PROBLÈME

1° Question

M est bistochastique si et seulement si : $\begin{cases} U^tM = U^t \\ U^tM^t = U^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U^tM = U^t \\ MU = U \end{cases}$.

U est donc vecteur propre de M associé à $r(M) = 1$. Le vecteur $\frac{1}{n}U$ est un vecteur de probabilité invariant par M.

2° Question

Une matrice de permutation est caractérisée par la présence d'un seul terme non nul égal à 1 sur chaque ligne et chaque colonne. La somme des termes de chaque ligne et chaque colonne est égale à 1.

Si Q est unitaire, chaque ligne et chaque colonne a pour norme 1. Donc :

$\forall i = 1\cdots n : \sum_{j=1}^{n} \left|q_{i,j}\right|^2 = 1 \quad \forall j = 1\cdots n : \sum_{i=1}^{n} \left|q_{i,j}\right|^2 = 1$

La matrice A est bien bistochastique.

3° Question

Soit $M_1,\cdots,M_k$ des matrices bistochastiques et $a_1,\cdots,a_k$ des scalaires positifs tels que $\sum_{i=1}^{k} a_i = 1$, alors l'exercice X.2 monntre que $\sum_{i=1}^{k} a_iM_i$ est stochastique. Mais on peut l'appliquer aussi aux matrices $M_1^t,\cdots,M_k^t$ pour prover que la matrice $\left(\sum_{i=1}^{k} a_iM_i\right)^t = \sum_{i=1}^{k} a_iM_i^t$ est stochastique.

4° Question

La proposition est vérifiée pour $n=1$

En supposant la proposition vraie <u>jusqu’au rang</u> $n-1$.

Soit $A=\left(a_{i,j}\right)\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Remarquons d’abord que les deux propriétés :

1) Pour toute permutation s de $\{1,\cdots,n\}$ $\prod_{j=1}^{n} a_{s(j),j}=0$.
2) Il existe $I,J\subseteq\{1,\cdots,n\}$ non vides tels que $Card(I)+Card(J)>n$ et $a_{i,j}=0$ pour $(i,j)\in I\times J$

se conservent si on effectue une permutation des lignes et des colonnes de *A*. Plus concètement, la propriété 2) se visualise, après permutations de ligne et de colonnes, par la présence d’un rectangle de 0 dont le «demi-périmètre » est strictement supérieur à *n*.

Supposons que *A* vérifie 1).

Soit la colonne *n* est nulle et 2) est vérifiée avec $I=\{1,\cdots,n\}$ .et $J=\{n\}$.

Soit il existe un terme non nul sur cette colonne. En permutant les lignes, on peut supposer qu’il s’agit de $a_{n,n}$. Pour toute pour toute permutation s de $\{1,\cdots,n\}$ tel que $s(n)=n$, $\prod_{j=1}^{n} a_{s(j),j}=0$, comme $a_{n,n}\neq 0$, $\prod_{j=1}^{n-1} a_{s(j),j}=0$.

Autrement dit la sous-matrice A_{n-1} obtenue à partir de *A* par suppression de la dernière ligne et dernière colonne vérifie au rang $n-1$ la propriété 1). Par application de l’hypothèse de récurrence, il existe $I,J\subseteq\{1,\cdots,n-1\}$ non vides tels que $Card(I)+Card(J)>n-1$ et $a_{i,j}=0$ pour $(i,j)\in I\times J$.

Si $Card(I)+Card(J)>n$, 2) est vérifiée pour la matrice *A*.

Sinon $Card(I)+Card(J)=n$. On peut alors en permutant les lignes et colonnes de *A*, amener les indices appartenant à I et J en premiers, de sorte que la matrice permutée se présente ainsi :

$$\begin{array}{cc} & \overset{J}{\leftrightarrow} \\ I\updownarrow & \left(\begin{array}{c|c} 0 & C \\ \hline B & D \end{array}\right) \end{array}$$

Comme $Card(I)+Card(J)=n$,

B est une matrice carrée de taille $Card(J)$,

C est une matrice carrée de taille $Card(I)$.

Soit s' une permutation de *J*, s'' une permutation de *I*, alors le produit :

$$\prod_{j\in J} b_{s'(j),j} \prod_{i\in I} b_{s''(i),i}$$

correspond à une permutation de $\{1,\cdots,n\}$ appliquée à A et est nulle selon 1).
Donc un des termes est nul. Supposons que ce soit le premier : $\prod_{j\in J} b_{s'(j),j}$,
alors on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à la matrice B et en déduire qu'il existe $K, L \subseteq J$ non vides tels que $Card(K)+Card(L) > Card(J)$ et $b_{i,j}=0$ pour $(i,j)\in K\times L$

En permutant, lignes et colonnes de A, on peut arriver alors à une matrice permuté se présentant sous la forme :

$$\begin{array}{cc} & \overset{J}{\leftrightarrow} \\ \begin{array}{c} I \updownarrow \\ K \updownarrow \\ \\ \end{array} & \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{0} & C \\ \hline 0 & \multicolumn{1}{|c|}{G} & \\ \cline{1-2} F & \multicolumn{1}{|c|}{H} & D' \end{array}\right) \\ & \underset{L}{\leftrightarrow} \end{array}$$

Dans le coin supérieur gauche, on a donc un rectangle de 0 de dimension :

$$\big(Card(I)+Card(K)\big)\times Card(L)$$

et

$$Card(I)+\underbrace{Card(K)+Card(L)}_{>Card(J)} > Card(I)+Card(J) = n$$

Ce qui termine (enfin !) la démonstration de 2) pour la matrice A.

Remarque :

Ce résultat est en relation avec le théorème des mariages de Hall.
Soit $E_1,\cdots,E_n$ une liste de sous-ensembles non vides d'un ensemble E. On dit qu'elle possède un système de représentants distincts (SDR), si et seulement si il existe une liste $(x_1,\cdots,x_n)$ distincts deux à deux et vérifiant pour tout $i=1\cdots n : x_i\in E_i$. Le thèorème des mariages de Hall donne une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une SDR :

$$E_1,\cdots,E_n \text{ possède un SDR}$$
$$\text{si et seulement si,}$$
$$\text{pour tout } J\subseteq\{1,\cdots,n\}\ Card\left(\bigcup_{j\in J} E_j\right) \geq Card(J)$$

On peut l'appliquer en définissant $E_j = \{i / a_{i,j}\neq 0\}$.

5° Question

Soit $A=\left(a_{i,\,j}\right)\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ bistochastique. Si pour toute permutation s de $\{1,\cdots,n\}$ $\prod_{j=1}^{n} a_{s\,(j),\,j}=0$, alors, selon la question précédente, il existe $I,J\subseteq\{1,\cdots,n\}$ tels que $a_{i,j}=0$ pour $(i,j)\in I\times J$ et $Card(I)+Card(J)>n$.

$$\sum_{\substack{i\notin I\\ j\in J}} a_{i,\,j}=\sum_{j\in J}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}=\sum_{j\in J}1=Card(J)$$

$$\sum_{\substack{i\in I\\ j\notin J}} a_{i,\,j}=\sum_{i\in I}\sum_{j=1}^{n} a_{i,\,j}=\sum_{i\in I}1=Card(I)$$

Or $\sum_{\substack{i\notin I\\ j\in J}} a_{i,\,j}+\sum_{\substack{i\in I\\ j\notin J}} a_{i\,,j}\le\sum_{i,j=1}^{n} a_{i\,,j}$.

Et pour une matrice bistochastique (et même pour une simplement stochastique),

$\sum_{i\,,j=1}^{n} a_{i,\,j}=n$. On aurait donc :

$Card(I)+Card(J)\le n$ en contradiction avec $Card(I)+Card(J)>n$.

Donc, pour toute matrice bistochastique $A=\left(a_{i,\,j}\right)\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une permutation s de $\{1,\cdots,n\}$ $\prod_{j=1}^{n} a_{s\,(j),\,j}\neq 0$.

6° Question

Par définition, $0<a\le 1$. Si $a=1$, c'est que : $a_{s\,(1),1}=\cdots=a_{s\,(n),\,n}=1$. Et tous les autres termes de A sont nuls et dans ce cas A est la matrice de permutation P_s et le théorème est démontré.

Sinon on peut poser $A'=\dfrac{1}{1-a}\left(A-a\,P_s\right)$

A' est positive puisque aux termes $a_{s\,(1),1},\cdots,a_{s\,(n),\,n}$ on soustrait le plus petit d'entre eux a mais, de ce fait, possèdera un terme nul de plus que A.

Enfin :

$$U^t A'=\frac{1}{1-a}\left(U^t A-a\,U^t P_s\right)=\frac{1}{1-a}\left(U^t-aU^t\right)=U^t$$

$$A'U=\frac{1}{1-a}\left(AU-a\,P_s\,U\right)=\frac{1}{1-a}\left(U-aU\right)=U$$

On a donc décomposé : $A=(1-a)A'+a\,P_s$ comme combinaison linéaire convexe de matrices bistochastiques. Si A' est une matrice de permutation, c'est fini, sinon lui applique le même traitement…
En itérant le procédé, on va, à chaque étape, augmenter le nombre de zéros. Mais l'histoire a une fin : une matrice bistochasique doit avoir au moins n termes non nuls et si elle en n, c'est une matrice de permutation. Donc après n^2-n étapes, au plus, ce sera terminé.

7° Question

$$A=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

la diagonale ne comprenant pas de zéros, on peut prendre $s=Id$, $a=1/4$ d'où :

$$A'=\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \text{ et } A=\frac{3}{4}A'+\frac{1}{4}I$$

On prend la permutation de matrice : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $a=\dfrac{1}{3}$, d'où :

$$A''=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ et } A'=\frac{2}{3}A''+\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On prend la permutation de matrice : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $a=\dfrac{1}{2}$ d'où :

$$A'''=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A''=\frac{1}{2}A'''+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A''' est une matrice de permutation, c'est terminé. Il ne reste qu'à remonter la filière :

$$A=\frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$