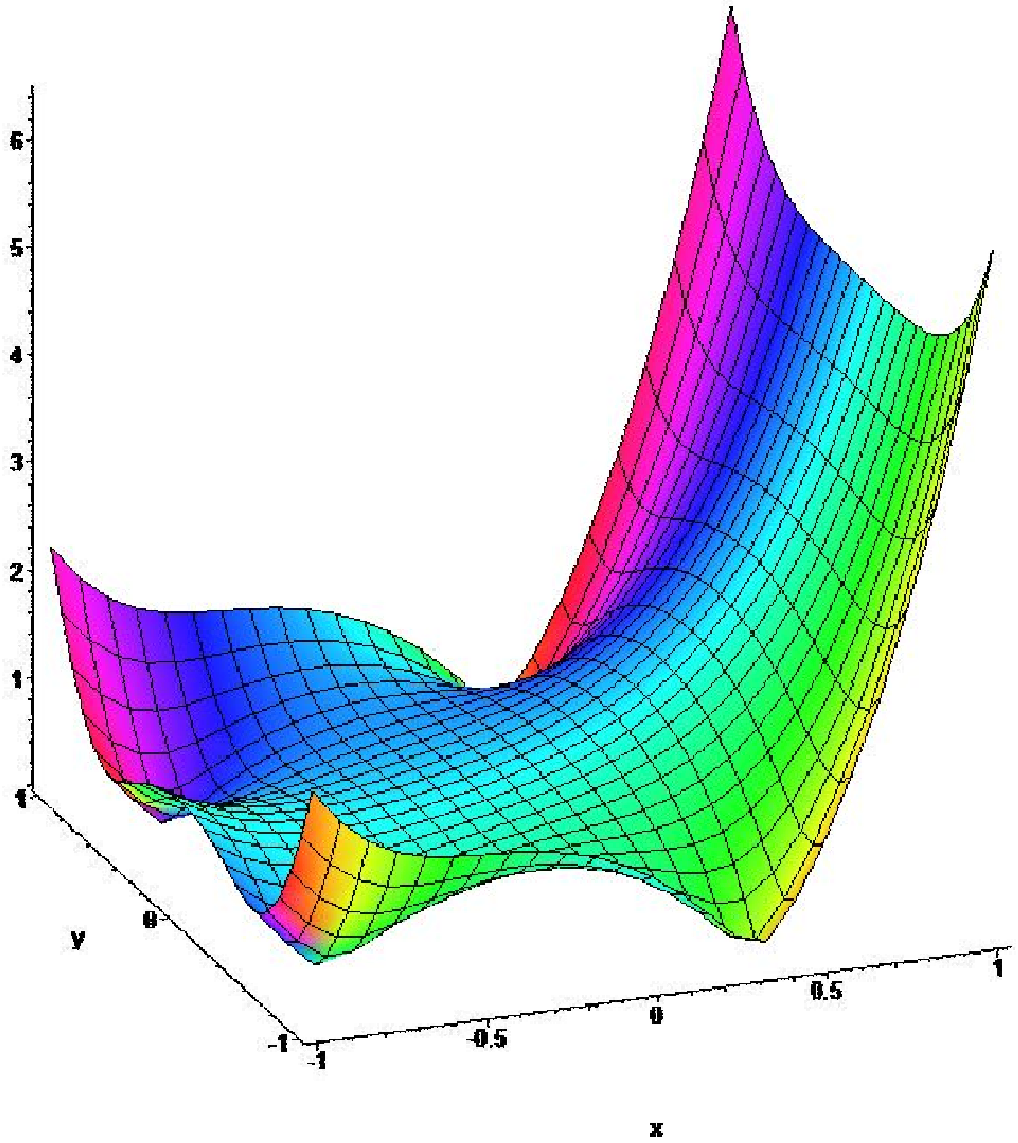
Jacques Cellier

Polynômes cyclotomiques



Représentation 3D du polynôme cyclotomique complexe $\Phi_5(X)$

Préliminaires

Fonction indicatrice d'Euler φ

1. Définition

La fonction indicatrice d'Euler est la fonction :

$$n \in \mathbb{N}^* \mapsto \varphi(n) = \left| \left\{ k \text{ entier} / 1 \le k \le n \text{ et } k \wedge n = 1 \right\} \right|$$

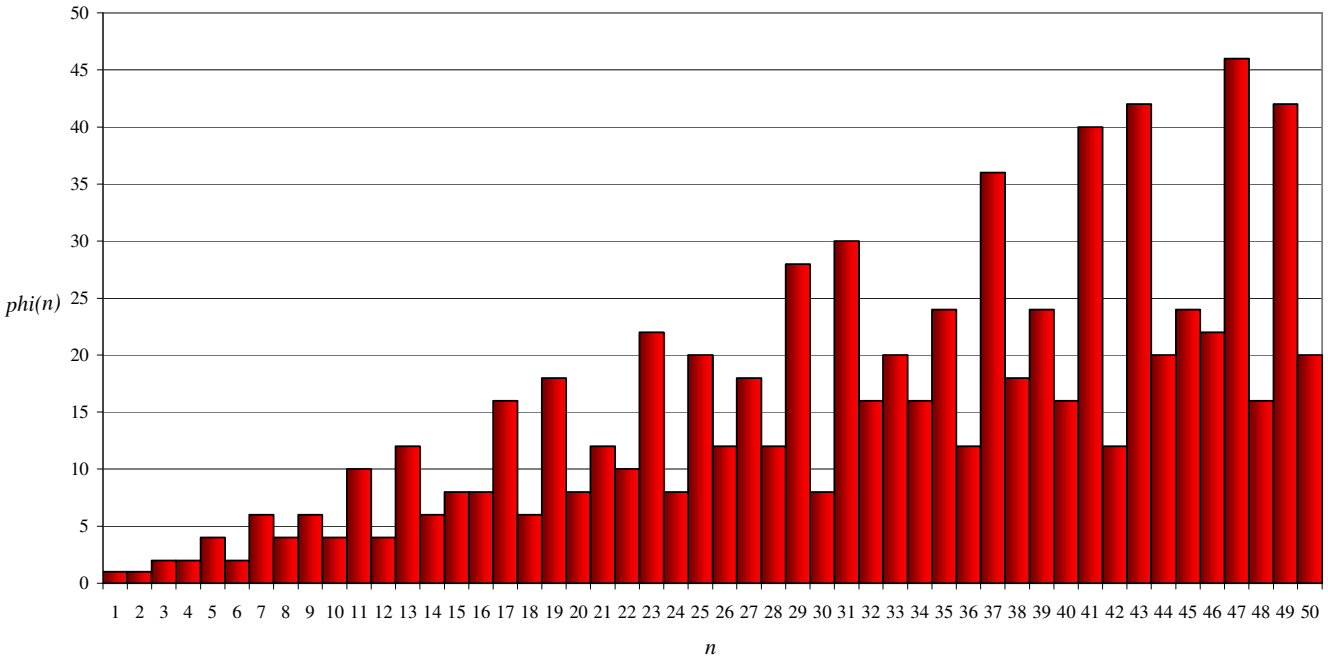
$\varphi(n)$ peut être aussi défini comme :

- ✓ *le nombre de générateurs du groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$,*
- ✓ *le nombre d'éléments inversibles de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \times)$*
- ✓ *le nombre de racines $n^{ième}$ primitives de l'unité dans $\mathbb{C}$.*

Exemples :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\varphi(i)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12	6	8	8	16	6	18	8

Fonction indicatrice d'Euler



2. Propriétés immédiates :

1. $\varphi(1) = 1$.
2. *Si p est premier,* $\varphi(p) = p - 1$.
3. *Si $n = p^r$ où p est premier,* $\varphi(n) = p^r - p^{r-1} = p^{r-1}(p-1)$.
4. *La fonction φ est multiplicative : si m et n premiers entre eux,* $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.

5. *Si la décomposition de* $n>1$ *en facteurs premiers est :* $n=\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ *,alors :*

$$\varphi(n)=\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i-1}\left(p_i-1\right)=n\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$$

6. *Si* $n>2$, $\varphi(n)$ *est pair.*

DEMONSTRATION :

1. Évident.
2. Évident.
3. Si $n=p^r$, les seuls éléments non premiers avec n de $1\cdots p^r$ sont les éléments de la forme $k\,p$ où $1\le k\le p^{r-1}$ et leur nombre est p^{r-1}.
4. Résulte de l'isomorphisme entre $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)\times(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},+)$ et $(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z},+)$ lorsque m et n sont premiers entre eux.
5. Résulte de 2 et 3.
6. Si $n=2^r$, avec $1<r$, $\varphi(n)==2^{r-1}(2-1)$ est pair. Sinon n comprend au moins un facteur premier impair p et $\varphi(n)$ est un multiple de $p-1$.

3. Proposition

$$n=\sum_{d|n}\varphi(d)$$

DEMONSTRATION :

Soit l'ensemble des n fractions : $F=\left\{\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{n}{n}\right\}$. Après mise sous forme irréductible ces fractions, on définit, pour chaque diviseur d de n, $F_d=\left\{\frac{k}{d}\in F\,/\,1\le k\le d \text{ et } k\wedge d=1\right\}$.

Il est clair alors que :

- ✓ L'ensemble des F_d avec $d\,|\,n$ est une partition de F.
- ✓ $\left|F_d\right|=\varphi(d)$.

D'où la formule.

4. Théorème d'Euler

Soit $n,a\in N^*$ *premiers entre eux, alors* $a^{\varphi(n)}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ n)$.

Si n *est premier* $a^n\equiv a\ (\mathrm{mod}\ n)$ *(petit théorème de Fermat)*

DEMONSTRATION :

Un élément a de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\times)$ est inversible si et seulement si il est premier avec n. En notant $U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\times)$ le groupe multiplicatif formé par les éléments inversibles de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\times)$, on a donc : $\left|U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\times)\right|=\varphi(n)$.
Comme $a\in U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\times)$, son ordre, c'est-à-dire le plus petit entier k tel que $a^k=1$ est, selon le théorème de Lagrange, un diviseur de l'ordre de l'ordre $\varphi(n)$ de $U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\times)$. D'où : $a^{\varphi(n)}\equiv 1$ dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\times)$.
Si n est premier $\varphi(n)=n-1$. Si a est un multiple de n, *alors* $a\equiv 0\ (\mathrm{mod}\, n)$ et la formule est vraie. Si a n'est pas multiple de n, le résultat précédent s'applique pour aboutir à la même formule.

Fonction de Mobius μ

5. Définition

La fonction de Mobius $\mathbb{N}^* \xrightarrow{\mu} \mathbb{Z}$ *est définie par :*

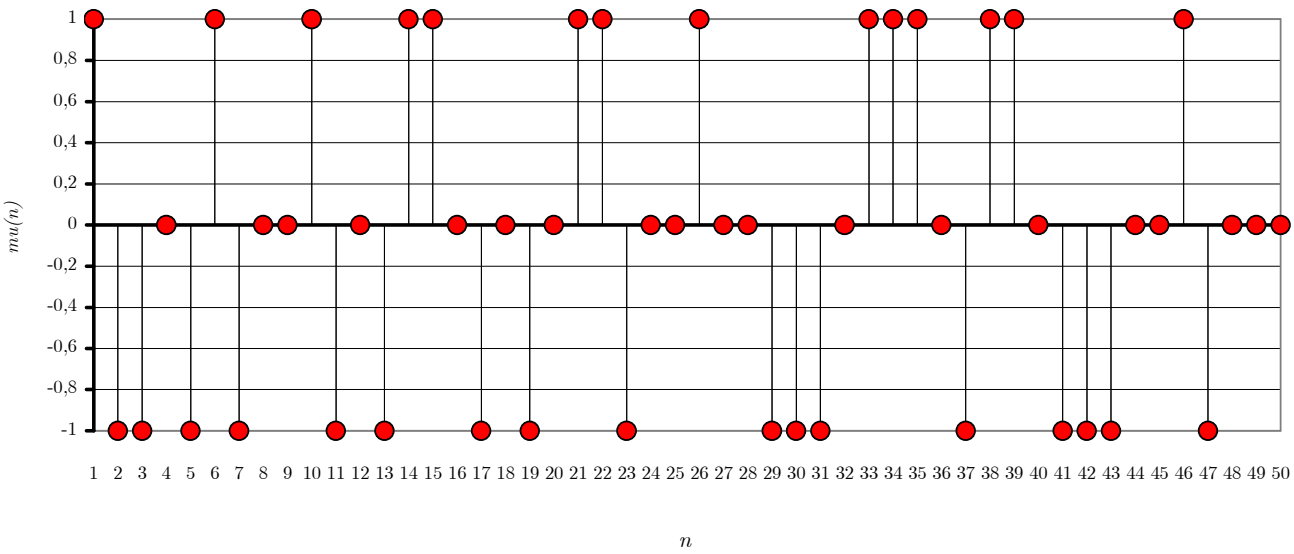
Soit la décomposition de n en facteurs premiers est : $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 1 \\ 0 \text{ si } n \text{ a un facteur premier carré autrement dit si il existe } \alpha_i \geq 2 \\ (-1)^r \text{ si } n \text{ a } r \text{ facteurs premiers (d'exposant 1)} \end{cases}$$

Exemples :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\mu(i)$	1	−1	−1	0	−1	1	−1	0	0	1	−1	0	−1	1	1	0	−1	0	−1	0

Fonction mu de Mobius



6. Propriétés immédiates

1. *La fonction* μ *est multiplicative : si* m *et* n *premiers entre eux,* $\mu(mn) = \mu(m)\mu(n)$.
2. *Si* $n > 1, \sum_{d|n} \mu(d) = 0$.

DEMONSTRATION :

1.

- ✓ Si $n = 1$ ou $m = 1$, c'est évident.
- ✓ Si m ou n ont un facteur carré, alors $\mu(m)\mu(n) = 0$. Alors, mn a aussi un facteur carré. Donc $\mu(mn) = 0$
- ✓ Dans le dernier cas $m = p_1 \cdots p_r$ et $n = q_1 \cdots q_s$. Et $\mu(m) = (-1)^r, \mu(n) = (-1)^s$ Comme m et n sont premiers entre eux leurs facteurs sont distincts et la décomposition de mn en facteurs premiers est : $mn = p_1 \cdots p_r\, q_1 \cdots q_s$. D'où : $\mu(m)\mu(n) = (-1)^r (-1)^s = (-1)^{r+s} = \mu(mn)$.

2.

Soit $n=\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ et $m=\prod_{i=1}^{k} p_i$. On a alors : $\sum_{d|n}\mu(d)=\sum_{d|m}\mu(d)$, car tout diviseur de n ne divisant pas m a un facteur carré et son image par μ est nulle. Pour $0\le i\le k$, on a C_k^i diviseurs d formés de i facteurs choisis parmi les k facteurs de m (on compte le diviseur 1 comme ayant 0 facteur). D'où :

$$\sum_{d|m}\mu(d)=\sum_{i=0}^{k}C_k^i\mu(i)=\sum_{i=0}^{k}C_k^i(-1)^i==(1-1)^k=0$$

7. Lemme

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ *et* $A_n=\{(a,b)/\,a,b\in\mathbb{N}^*, a\,|\,n \text{ et } b\,|\,a\}$ *et* $B_n=\left\{(xy,x)/\,x,y\in\mathbb{N}^*,\ x\,|\,n \text{ et } y\,|\,\frac{n}{x}\right\}$, *alors* $A=B$.

DEMONSTRATION :

1. Soit $(a,b)\in A_n$. Comme $b\,|\,a$ on peut poser $x=\frac{a}{b}$ et $y=b$. Comme $b\,|\,a$ et $a\,|\,n$, $b\,|\,a$. On a donc $(a,b)=(xy,x)$ avec $x\,|\,n$ et $n=kxy\Rightarrow\frac{n}{x}=ky\Rightarrow y\,|\,\frac{n}{x}$. Donc $(a,b)=(xy,x)\in B_n$.
2. Soit $(xy,x)\in B_n$ En posant $b=x$, et $a=xy$, on a : $b\,|\,a$ et $y\,|\,\frac{n}{x}\Rightarrow\frac{n}{x}=ky\Rightarrow n=k\underbrace{xy}_{=a}\Rightarrow a\,|\,b$. Et $(a,b)=(xy,x)\in A_n$.

8. Proposition : formule d'inversion de Mobius

Soit un couple de fonctions f, g de $\mathbb{N}^*\longrightarrow G$ *groupe abélien, alors :*

Si G est noté additivement :

$$g(n)=\sum_{d|n}f(d)\Leftrightarrow f(n)=\sum_{a|n}\mu\left(\frac{n}{a}\right)g(a)$$

Si G est noté multiplicativement :

$$g(n)=\prod_{a|n}f(a)\Leftrightarrow f(n)=\prod_{a|n}g(a)^{\mu\left(\frac{n}{a}\right)}$$

DEMONSTRATION :

Remarques préliminaires :

- ✓ Comme $\mu(a)\in\{-1,0,1\}$ les expressions de droite ont un sens.
- ✓ $\sum_{a|n}\mu\left(\frac{n}{a}\right)g(a)=\sum_{a|n}\mu(a)g\left(\frac{n}{a}\right)$, puisque $a\,|\,n\Leftrightarrow\frac{n}{a}\,|\,n$.
- ✓ La démonstration va être faite pour la forme additive avec notations et résultat du lemme 7.

Soit $g(n)=\sum_{d|n}f(d)$

$$\sum_{a|n}\mu\left(\frac{n}{a}\right)g(a)=\sum_{a|n}\mu\left(\frac{n}{a}\right)\underbrace{\left(\sum_{b|a}f(b)\right)}_{=g(a)}=\sum_{(a,b)\in A_n}\mu\left(\frac{n}{a}\right)f(b).$$

Selon le lemme 7 :

$$\sum_{a|n}\mu\left(\frac{n}{a}\right)g(a)=\sum_{(a,b)\in A_n}\mu\left(\frac{n}{a}\right)f(b)=\sum_{(xy,x)\in B_n}\mu\left(\frac{n}{xy}\right)f(x)=\sum_{x|n}\ \sum_{y|\frac{n}{x}}\mu\left(\frac{n}{xy}\right)f(x)=\sum_{x|n}f(x)\sum_{y|\frac{n}{x}}\mu\left(\frac{n}{xy}\right)$$

Or, selon 6, $\sum_{y\left|\frac{n}{x}\right.}\mu\left(\frac{n}{xy}\right)=\begin{cases}1 \text{ si } \frac{n}{x}=1\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$ D'où : $\sum_{a|n}\mu\left(\frac{n}{a}\right)g(a)=f(n)$.

La réciproque se démontre de façon analogue.

9. Corollaire

$$n=\sum_{d|n}\varphi(d)\Leftrightarrow\varphi(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\frac{d}{n}$$

Polynômes cyclotomiques : définition, premières propriétés

Dans la suite, pour $n \in \mathbb{N}^*$ on désignera par $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des $\varphi(n)$ racines $n^{ème}$ primitives de l'unité dans $\mathbb{C}$ et par ω un élément quelconque de $\mathcal{P}_n$, par exemple $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

10. Définition

Le polynôme cyclotomique d'ordre n $\Phi_n(X) \in \mathbb{C}[X]$ *est défini par :*

$$\Phi_n(X) = \prod_{\omega \in \mathcal{P}_n} (X - \omega) = \prod_{\substack{1 \le k \le n \\ k \wedge n = 1}} \left(X - \omega^k\right)$$

Exemples :

La fonction **cyclotomic(n, X)** du package **numtheory** de Maple retourne le polynôme cyclotomique d'ordre n $\Phi_n(X)$:

```
> for i from 1 to 16 do print(i,sort(cyclotomic(i,X)));od;
```

$$1, X - 1$$
$$2, X + 1$$
$$3, X^2 + X + 1$$
$$4, X^2 + 1$$
$$5, X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$$
$$6, X^2 - X + 1$$
$$7, X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$$
$$8, X^4 + 1$$
$$9, X^6 + X^3 + 1$$
$$10, X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$$
$$11, X^{10} + X^9 + X^8 + X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$$
$$12, X^4 - X^2 + 1$$
$$13, X^{12} + X^{11} + X^{10} + X^9 + X^8 + X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$$
$$14, X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$$
$$15, X^8 - X^7 + X^5 - X^4 + X^3 - X + 1$$
$$16, X^8 + 1$$

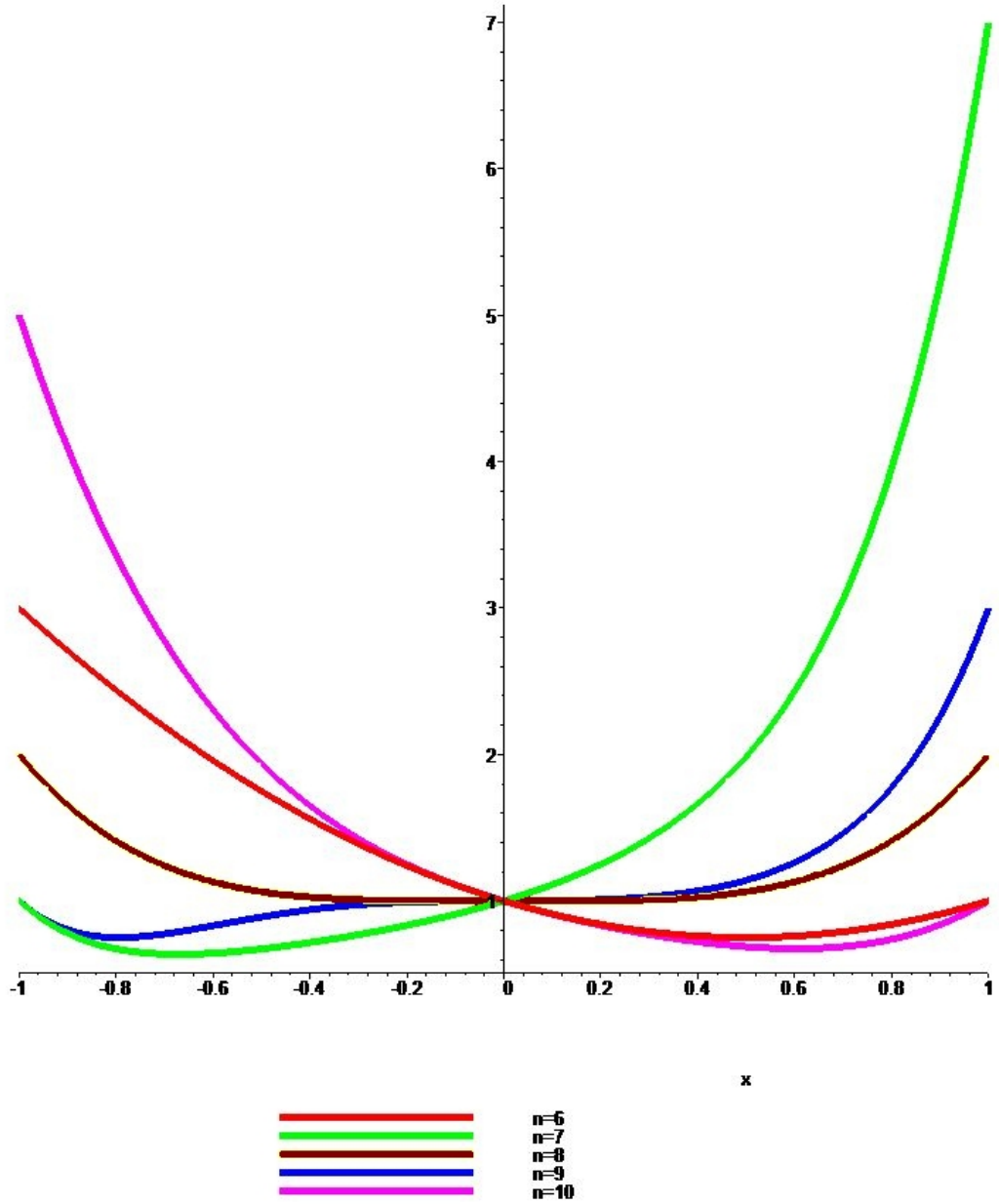
(*le* **sort** *est destiné à obtenir les polynômes ordonnés selon les puissantes décroissantes*)

Surprise ! Tous les coefficients sur ces premiers exemples sont égaux à -1, 0 ou 1. Mais :

```
> sort(cyclotomic(105,X));
```

$$X^{48} + X^{47} + X^{46} - X^{43} - X^{42} - 2X^{41} - X^{40} - X^{39} + X^{36} + X^{35} + X^{34} + X^{33}$$
$$+ X^{32} + X^{31} - X^{28} - X^{26} - X^{24} - X^{22} - X^{20} + X^{17} + X^{16} + X^{15} + X^{14} + X^{13}$$
$$+ X^{12} - X^9 - X^8 - 2X^7 - X^6 - X^5 + X^2 + X + 1$$

a deux coefficients égal à -2.



Courbes de $x \mapsto \Phi_n(x), x \in [-1 \cdots 1], n \in 6 \cdots 10$

11. Propriétés immédiates

1. $\Phi_n(X)$ *est de degré* $\varphi(n)$ *donc de degré pair si* $n > 2$.
2. *Le polynôme* $\Phi_n(X)$ *est un diviseur du polynôme* $X^n - 1$.
3. $\Phi_n(X)$ *a toutes ses racines simples.*
4. $\Phi_n(X)$ *est unitaire.*
5. *Si* n *est premier,* $\Phi_n(X) = 1 + X + \cdots + X^{n-1}$.

.

DEMONSTRATION :

1. $\left|\mathcal{P}_n\right| = \varphi(n)$ et, selon 2.6 ; pour $n > 2$, $\varphi(n)$ est pair.
2. $X^n - 1 = \prod_{1 \le k \le n} \left(X - \omega^k\right)$.
3. Évident.
4. Évident.

5. Évident.
6. Si n est premier, les entiers $k \le n$ premiers avec n sont : $1,2,\cdots,n-1$ et :

$$\Phi_n(X) = (X-\omega)\cdots(X-\omega^{n-1}) = \frac{(X-1)(X-\omega)\cdots(X-\omega^{n-1})}{(X-1)} = \frac{X^n-1}{(X-1)} = 1+X+\cdots+X^{n-1}.$$

12. Théorème

$$X^n-1 = \prod_{d|n}\Phi_d(X)$$

DEMONSTRATION :

En reprenant la démonstration de la proposition 3, $F = \left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n}{n}\right\}$:

$$X^n-1 = \prod_{1\le j\le n}\left(X - e^{\frac{j}{n}2i\pi}\right) = \prod_{\frac{j}{n}\in F}\left(X - e^{\frac{j}{n}2i\pi}\right).$$

Comme les $F_d = \left\{\frac{k}{d} \in F \,/\, 1\le k\le d \text{ et } k\wedge d = 1\right\}$ où $d \mid n$ forment une partition de F,

$$X^n-1 = \prod_{d|n}\ \prod_{\frac{k}{d}\in F_d}\left(X - e^{\frac{k}{d}2i\pi}\right)$$

Or $\prod_{\frac{k}{d}\in F_d}\left(X - e^{\frac{k}{d}2i\pi}\right) = \Phi_d(X)$.

13. Corollaire

Les coefficients de $\Phi_n(X)$ sont entiers, autrement dit $\Phi_n(X) \in \mathbb{Z}[X]$

DEMONSTRATION :

Récurrence sur n :

1. Vrai pour $\Phi_1(X)$ et $\Phi_2(X)$.
2. Supposons vrai pour tout $k \le n-1$. La formule du théorème 13 peut s'écrire :

$$X^n-1 = \Phi_n(X)\prod_{\substack{d|n\\ d<n}}\Phi_d(X) \Leftrightarrow \Phi_n(X) = \frac{X^n-1}{\prod_{\substack{d|n\\ d<n}}\Phi_d(X)}$$

Et, selon l'hypothèse de récurrence, tous les $\Phi_d(X)$ avec $d < n$ sont à coefficient entiers.

14. Théorème

$$\Phi_n(X) = \prod_{d|n}\left(X^d-1\right)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)} = \prod_{d|n}\left(X^{\frac{n}{d}}-1\right)^{\mu(d)}$$

DEMONSTRATION :

Soit $\begin{array}{l}\mathbb{N}^* \xrightarrow{\ g\ } \mathbb{C}(X)^* \\ n \mapsto g(n) = \Phi_n(X)\end{array}$ où $\mathbb{C}(X)^*$ désigne le groupe multiplicatif des fonctions rationnelles non nulles sur $\mathbb{C}$. En posant $f(n) = \prod_{d|n} g(d)$, on obtient : $f(n) = \prod_{d|n}\Phi_d(X) = X^n-1$ d'après le théorème 11. La formule d'inversion de Mobius version multiplicative donne alors :

$$g(n)=\Phi_n(X)=\prod_{d|n} f(d)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}=\prod_{d|n}\left(X^d-1\right)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}$$

Application :

$$\Phi_8(X)=\prod_{d|8}\left(X^d-1\right)^{\mu\left(\frac{8}{d}\right)}=(X-1)^{\mu(8)}\left(X^2-1\right)^{\mu(4)}\left(X^4-1\right)^{\mu(2)}\left(X^8-1\right)^{\mu(1)}$$

$$=(X-1)^0\left(X^2-1\right)^0\left(X^4-1\right)^{-1}\left(X^8-1\right)^1=\frac{\left(X^4\right)^2-1}{X^4-1}=X^4+1$$

La démonstration de la proposition suivante requière un petit lemme :

15. Lemme

Soit, pour $3\le n$, $\mathcal{P}_n$ *l'ensemble des* $\varphi(n)$ *racines* $n^{ème}$ *primitives de l'unité dans* $\mathbb{C}$ *.Alors :*

- ✓ $\omega\in\mathcal{P}_n\Leftrightarrow\overline{\omega}=\dfrac{1}{\omega}\in\mathcal{P}_n$.
- ✓ $\displaystyle\prod_{\omega\in\mathcal{P}_n}\omega=1$.

DEMONSTRATION :

$\omega=e^{\frac{k}{n}2i\pi}\in\mathcal{P}_n\Leftrightarrow k\wedge n=1$. $\overline{\omega}=e^{\frac{n-k}{n}2i\pi}$. Or $k\wedge n=1\Rightarrow(n-k)\wedge n=1$. Donc $\overline{\omega}=\mathcal{P}_n$.

Pour la deuxième assertion, il suffit de regrouper par couples $(\omega,\overline{\omega})$ les termes du produit $\displaystyle\prod_{\omega\in\mathcal{P}_n}\omega$ pour obtenir le résultat.

16. Proposition

Pour $n\ge 2$ $\Phi_n(X)$ *est un polynôme palindromique Autrement dit les coefficients* a_j *vérifient :* $a_j=a_{\varphi(n)-j}$ *. En particulier* $a_0=\Phi_n(0)=a_{\varphi(n)}=1$.

DEMONSTRATION :

Au préalable on peut remarquer que $\Phi_2(X)=X+1$ est palindromique.

Pour un polynôme $P(X)=\displaystyle\sum_{j=0}^{m}a_jX^j$, le polynôme réciproque est $\tilde{P}(X)=\displaystyle\sum_{j=0}^{m}a_jX^{m-j}$

Dans $\mathbb{C}[X]$ où on peut assimiler polynômes et fonctions polynômes : $\tilde{P}(X)=X^mP(1/X)$.

$\Phi_n(X)$ est un polynôme palindromique équivaut donc à $\Phi_n(X)=X^{\varphi(n)}\Phi_n\left(\dfrac{1}{X}\right)$.

Le calcul de $X^{\varphi(n)}\Phi_n\left(\dfrac{1}{X}\right)$ donne :

$$X^{\varphi(n)}\Phi_n\left(\frac{1}{X}\right)=X^{\varphi(n)}\prod_{\omega\in\mathcal{P}_n}\underbrace{\left(\frac{1}{X}-\omega\right)}_{\varphi(n)\ termes}=\prod_{\omega\in\mathcal{P}_n}X\left(\frac{1}{X}-\omega\right)=\prod_{\omega\in\mathcal{P}_n}(1-\omega X)=\prod_{\omega\in\mathcal{P}_n}\omega\left(\frac{1}{\omega}-X\right)=\prod_{\omega\in\mathcal{P}_n}\omega\prod_{\omega\in\mathcal{P}_n}(\overline{\omega}-X)$$

Selon le lemme 15 : $\displaystyle\prod_{\omega\in\mathcal{P}_n}\omega=1$

$$X^{\varphi(n)}\Phi_n\left(\frac{1}{X}\right)=\prod_{\omega\in\mathcal{P}_n}(\overline{\omega}-X)=\underbrace{(-1)^{\varphi(n)}}_{\substack{=1\ car\\ \varphi(n)\ pair}}\prod_{\omega\in\mathcal{P}_n}(X-\overline{\omega})=\prod_{\omega\in\mathcal{P}_n}(X-\overline{\omega}).$$

Et comme, selon le lemme 15 : $\omega\in\mathcal{P}_n\Leftrightarrow\overline{\omega}=\dfrac{1}{\omega}\in\mathcal{P}_n$, finalement $X^{\varphi(n)}\Phi_n\left(\dfrac{1}{X}\right)=\Phi_n(X)$.

Irréductibilité sur $\mathbb{Q}[X]$

Quelques précisions sur la notion d'irréductibilité

Dans un anneau intègre A, un élément $x \neq 0$ est dit irréductible s''il n'est pas inversible et si $x = y\,z \;\; (y, z \in A) \Rightarrow y$ ou z inversible. Par conséquent :

- ✓ Dans $\mathbb{Z}[X]$, $2X$ est réductible car le polynôme constant égal à 2 est non inversible ainsi que X.
- ✓ Dans $\mathbb{Q}[X]$, $2X$ est irréductible car le polynôme constant égal à 2 à pour inverse $\frac{1}{2}$.

De fait, dans $\mathbb{Z}[X]$, si un entier $1 < d$ divise tous les coefficients d'un polynôme non constant $P(X)$, ce dernier peut s'écrire : $P(X) = d\,\widehat{P}(X)$ et est réductible. Pour les polynômes non constants, seuls ceux dont le PGCD des coefficients est égal à 1 peuvent être irréductibles.

17. Définition : polynôme primitif

Le contenu $cont(P)$ d'un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ non nul est le PGCD de ses coefficients.

P est dit primitif si et seulement si $cont(P) = 1$.

Exemple :

Un polynôme unitaire est primitif.

18. Proposition

Soit $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ non nuls :

1. *Si P et Q sont primitifs, PQ aussi.*
2. *$cont(PQ) = cont(P) \times cont(Q)$*

DEMONSTRATION :

1. Soit $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ primitifs. Supposons que PQ ne le soit pas. Il existe donc un nombre premier p divisant tous les coefficients de $P(X)\,Q(X) = \sum_{i=0}^{n} c_i X^i$. Considérons le morphisme d'anneau :

$$\mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X] \;\; P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mapsto \overline{P(X)} = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i}\,\overline{X}^i .$$

Comme les c_i sont tous des multiples de p $\overline{c_i} = 0$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et par conséquent $\overline{PQ} = \overline{P}\,\overline{Q} = 0$. $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ est un anneau intègre donc $\overline{P} = 0$ ou $\overline{Q} = 0$. Mais alors un des polynômes P ou Q a tous ses coefficients multiples de p. Contradiction.

2. Si $cont(P) = p$ et $cont(Q) = q$, on peut écrire : $P = pP_1$ et $Q = qQ_1$ où P_1, Q_1 sont primitifs. On alors : $cont(P) \times cont(Q) = pq$ et $cont(PQ) = cont(p\,q\,P_1\,Q_1) = p\,q\underbrace{cont(P_1 Q_1)}_{=1} = p\,q$ puisque $P_1 Q_1$ primitif.

19. Lemme

Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ non nul, alors il existe un entier $p > 0$ tel que le polynôme $pP \in \mathbb{Z}[X]$ et ait son contenu $cont(pP)$ premier avec p.

Si de plus, P est unitaire, pP est primitif.

DEMONSTRATION :

Soit $P(X)=\sum_{i=0}^{n}\frac{a_i}{b_i}X^i, a_i\in\mathbb{Z}, b_i\in\mathbb{N}^*$ après réduction des fractions $\frac{a_i}{b_i}$ à leur plus petit dénominateur commun p, on peut écrire : $P(X)=\frac{1}{p}\sum_{i=0}^{n}a_i'X^i, a_i'\in\mathbb{Z}$. Si il existait un facteur commun à p et aux a_i', p ne serait pas le plus petit dénominateur commun. Donc p est premier avec le PGCD des a_i' égal à $cont(pP)$.

Si de plus P est unitaire, $1=\frac{1}{p}a_n'$ et $a_n'=p$. Comme p est premier avec le PGCD des a_i', ce dernier doit être égal à 1.

20. Proposition

Soit $P\in\mathbb{Z}[X]$ et $Q,R\in\mathbb{Q}[X]$. On suppose que deux de ces polynômes sont unitaires. Alors :

$$P=QR\Rightarrow Q \text{ et } R\in\mathbb{Z}[X]$$

DEMONSTRATION :

Remarquons au préalable que si deux de ces polynômes sont unitaires, le troisième l'est aussi.

Soit alors, selon le lemme 19 :

- ✓ q entier >0 tel que $qQ\in\mathbb{Z}[X]$ et soit primitif.
- ✓ r entier >0 tel que $rR\in\mathbb{Z}[X]$ et soit primitif.

On a alors $qrP=qQrR$ primitif d'après la proposition 18. Mais ceci n'est possible que si $qr=1$, ce qui implique $q=r=1$ et alors : Q et $R\in\mathbb{Z}[X]$.

21. Proposition

Soit $P\in\mathbb{Z}[X]$ non constant, alors :

1. *Si P n'est pas primitif, P est réductible sur $\mathbb{Z}[X]$*
2. *Si P est primitif :*

$$P \text{ irréductible dans } \mathbb{Z}[X] \Leftrightarrow P \text{ irréductible dans } \mathbb{Q}[X]$$

DEMONSTRATION :

Le premier point a déjà été évoqué.

L'implication $\Leftarrow$ est évidente.

Supposons P irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Si P est réductible dans $\mathbb{Q}[X]$, $P=QR$ $Q,R\in\mathbb{Q}[X]$. Soit alors, selon le lemme 19 :

- ✓ q entier >0 tel que $Q_1=qQ\in\mathbb{Z}[X]$ et q premier $cont(Q_1)$.
- ✓ r entier >0 tel que $R_1=rR\in\mathbb{Z}[X]$ et r premier $cont(R_1)$.

On alors : $P=\frac{1}{qr}Q_1R_1$ où $P,Q_1,R_1\in\mathbb{Z}[X]$. D'où $qr\,cont(P)=cont(Q_1R_1)$. Or P est primitif et $cont(Q_1R_1)=cont(Q_1)cont(R_1)$ d'après la proposition 18. Finalement :

$$qr=cont(Q_1)cont(R_1)$$

- ✓ Comme q premier avec $cont(Q_1)$, $q\,|\,cont(R_1)$.
- ✓ Comme r premier avec $cont(R_1)$, $r\,|\,cont(Q_1)$.

Il en résulte que $\frac{1}{q}R_1, \frac{1}{r}Q_1 \in \mathbb{Z}[X]$ et $P = \left(\frac{1}{r}Q_1\right)\left(\frac{1}{q}R_1\right)$ contredit l'irréductibilité de P dans $\mathbb{Z}[X]$.

Rappel sur le polynôme minimal d'un élément de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{Q}$

Soit $\omega \in \mathcal{P}_n$. Comme il est racine du polynôme $X^n - 1$, il est algébrique sur $\mathbb{Q}$. L'ensemble des polynômes de $\mathbb{Q}[X]$ ayant ω comme racine est non vide et est un idéal I_ω de $\mathbb{Q}[X]$. Comme $\mathbb{Q}$ est un corps, I_ω est principal et a pour générateur un unique polynôme unitaire $P_\omega(X)$ qui, par définition est le polynôme minimal de ω sur $\mathbb{Q}$.

$$I_\omega = P_\omega(X)\mathbb{Q}[X]$$

$P_\omega(X)$ est le polynôme <u>unitaire</u> de degré minimal ayant ω comme racine. Il vérifie les propriétés suivantes :

1. $P_\omega(X)$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
2. Si un polynôme $T(X) \in \mathbb{Q}[X]$ a pour racine ω, il appartient à l'idéal I_ω et est un multiple de $P_\omega(X)$. En particulier pour $X^n - 1 = P_\omega(X)S(X)$ et $\Phi_n(X) = P_\omega(X)R(X)$.
3. ω est racine simple de $P_\omega(X)$.
4. Si α est une autre racine de $P_\omega(X)$, alors $P_\omega(X)$ est aussi le polynôme minimal de α.

Le théorème d'irréductibilité

Deux résultats préalables :

22. Proposition et définition : homomorphisme de Frobenius

Soit A un anneau de caractéristique p premier. L'application de $A \xrightarrow{f} A$ $x \mapsto x^p$ vérifie :

1. $f(x+y) = f(x) + f(y)$
2. $f(xy) = f(x)f(y)$

Et est donc un homomorphisme (dit de Frobenius) de l'anneau A dans lui-même.

DEMONSTRATION :

1. $f(x+y) = (x+y)^p = x^p + C_p^1 x^{p-1}y + \cdots + C_p^{p-1} x y^{p-1} + y^p$

   $C_p^k = \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}$. Pour $1 \le k \le p-1$, les facteurs $\neq 1$ de $k!$ ne peuvent diviser p qui est premier. Il s'en suit que C_p^k est un multiple de p donc nul dans A.
2. Évident.

23. Lemme

Soit p premier, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ l'anneau des polynômes sur le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $P(X) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$, alors : $(P(X))^p = P(X^p)$

DEMONSTRATION :

Soit $P(X) = \sum_{i=0}^{n} p_i X^i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$.

Comme $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est de caractéristique p, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ aussi et le lemme précédent s'applique :

$(P(X))^p = \sum_{i=0}^{n} p_i^p X^{pi} = \sum_{i=0}^{n} p_i^p \left(X^p\right)^i$.

Comme $p_i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, le petit théorème de Fermat s'applique (cf 4) et $p_i^p = p_i$ Au final :

$$\left(P(X)\right)^p = \sum_{i=0}^{n} p_i \left(X^p\right)^i = P\left(X^p\right)$$

24. Théorème

$\Phi_n(X)$ est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$, donc aussi sur $\mathbb{Z}[X]$.

DEMONSTRATION :

Soit $E = \{z \in \mathbb{C} / P_\omega(z) = 0\}$. Comme $\Phi_n(X)$ est multiple de $P_\omega(X)$, $E \subseteq \mathcal{P}_n$.

On va prouver que $\mathcal{P}_n \subseteq E$

$$X^n - 1 = P_\omega(X) S(X).$$

La proposition 20 indique que $P_\omega(X), S(X) \in \mathbb{Z}[X]$.

Si $\alpha \in E$, $\alpha^n = 1$. Soit p un nombre premier ne divisant pas n $\left(\alpha^p\right)^n = \left(\alpha^n\right)^p = 1$. $P_\omega\left(\alpha^p\right) S\left(\alpha^p\right) = 0$.

Supposons que $\alpha^p \notin E$ donc que $P_\omega\left(\alpha^p\right) \neq 0$. Donc $S\left(\alpha^p\right) = 0$ et α racine de $S\left(X^p\right)$. Alors $S\left(X^p\right)$ multiple de $P_\omega(X)$: $S\left(X^p\right) = P_\omega(X) T(X)$.

La proposition 20 indique que $T(X)$ aussi appartient à $\mathbb{Z}[X]$. On peut projeter sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ ce qui donne en tenant compte du lemme 23 :

$$\left(\overline{S}(X)\right)^p = \overline{S}\left(X^p\right) = \overline{P_\omega}(X) \overline{T}(X)$$

$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ est anneau principal donc factoriel, tout facteur irréductible $\overline{R}(X)$ de $\overline{P_\omega}(X)$ divise $\overline{S}(X)$.

Mais on a aussi :

$$\overline{X^n - 1} = \overline{P_\omega}(X) \overline{S}(X) \text{ dans } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$$

Et alors $\overline{X^n - 1}$ posséderait un facteur irréductible au carré. Au quel cas $\overline{X^n - 1}$ et son polynôme dérivé $\overline{nX^{n-1}}$ aurait un facteur commun. Comme n et p premiers entre eux, n inversible dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, ce qui permet d'écrire :

$$\overline{X^n - 1} + n^{-1}\overline{X}\ \overline{nX^{n-1}} = 1$$

Or ceci est une égalité de Bezout qui dit que $\overline{X^n - 1}$ et $\overline{nX^{n-1}}$ sont premiers entre eux dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$. En contradiction avec l'existence d'un facteur commun.

On a donc prouvé que si p est premier et ne divise pas n : $\alpha \in E \Rightarrow \alpha^p \in E$.

Soit maintenant $\beta \in \mathcal{P}_n$, β peut s'écrire $\beta = \omega^m$ où m premier avec n. m se décompose en produits de nombres premiers $m = \prod_{i=1}^{k} p_i$ où aucun des premiers p_i (non supposés distincts) ne divise n. En appliquant successivement le résultat précédent on aura :

$$\omega^{p_1} \in E, \omega^{p_1 p_2} = \left(\omega^{p_1}\right)^{p_2} \in E, \cdots \omega^m = \omega^{p_1 p_2 \cdots p_k} \in E$$

Donc $\beta \in E$. Mais alors les polynômes unitaires $\Phi_n(X)$ et $P_\omega(X)$ ont même racines et sont égaux. Comme par définition $P_\omega(X)$ est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$, $\Phi_n(X)$ aussi. Et comme $\Phi_n(X) \in \mathbb{Z}[X]$ et est unitaire, donc primitif, il est aussi irréductible sur $\mathbb{Z}[X]$.

Qu'en est-il sur un corps fini ?

Le résultat précédent s'avère alors faux.

Par exemple dans $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$, où $1 = -16 \bmod 17$, le polynôme cyclotomique $\Phi_8(X) = X^4 + 1$ peut s'écrire :

$$\Phi_8(X) = X^4 + 1 = X^4 - 16 = \left(X^2 - 4\right)\left(X^2 + 4\right) = (X - 2)(X + 2)\left(X^2 + 4\right)$$

Et est donc réductible. On peut même poursuivre sachant que $4 = -64 \bmod 17$:

$$\Phi_8(X) = X^4 + 1 = (X - 2)(X + 2)\left(X^2 + 4\right) = (X - 2)(X + 2)\left(X^2 - 64\right) = (X - 2)(X + 2)(X - 8)(X + 8)$$

Le cas des corps finis fera l'objet d'une section à venir.

Relations entre certains Φ_n

25. Proposition :

Soit p premier, alors $\Phi_{pn}(X)=\begin{cases}\Phi_n\left(X^p\right) \text{ si } p\mid n\\ \dfrac{\Phi_n\left(X^p\right)}{\Phi_n(X)} \text{ sinon}\end{cases}$

DEMONSTRATION :

Selon la proposition 14 :

$$\Phi_{pn}(X)=\prod_{d\mid pn}\left(X^{\frac{pn}{d}}-1\right)^{\mu(d)}=\prod_{d\mid n}\left(\left(X^p\right)^{\frac{n}{d}}-1\right)^{\mu(d)}\prod_{\cancel{d\mid p}}\left(X^{\frac{pn}{d}}-1\right)^{\mu(d)}$$

$$=\Phi_n\left(X^p\right)\prod_{\cancel{d\mid pn}}\left(X^{\frac{pn}{d}}-1\right)^{\mu(d)}$$

1° cas : $p\mid n$

Alors $n=p^kq$ avec $1\le k$ et $p\wedge q=1$, $pn=p^{k+1}q$ Les diviseurs d de pn sont de la forme : $d=p^st$ avec $0\le s\le k+1$ et $t\mid q$.

Si $0\le s\le k$, d divise aussi $n=p^kq$. Les seuls diviseurs de pn ne divisant pas p sont donc de la forme $d=p^{k+1}t$. Comme $1\le k$, ils ont un facteur carré et $\mu(d)=0$. Au final :

$$\prod_{\cancel{d\mid pn}}\left(X^{\frac{pn}{d}}-1\right)^{\mu(d)}=\prod_{\cancel{d\mid pn}}\left(X^{\frac{pn}{d}}-1\right)^{0}=1$$

2° cas : $\cancel{p\mid n}$

Alors les diviseurs de d de pn ne divisant pas p sont de la forme $d=pk$ où $k\mid n$. Alors :

$$\prod_{\cancel{d\mid pn}}\left(X^{\frac{pn}{d}}-1\right)^{\mu(d)}=\prod_{k\mid n}\left(X^{\frac{pn}{pk}}-1\right)^{\mu(pk)}$$

Comme $p\wedge k=1$, et μ multiplicative : $\mu(pk)=\mu(p)\mu(k)$. p étant premier, $\mu(p)=-1$. Au final :

$$\prod_{\cancel{d\mid pn}}\left(X^{\frac{pn}{d}}-1\right)^{\mu(d)}=\prod_{k\mid n}\left(X^{\frac{pn}{pk}}-1\right)^{\mu(pk)}=\prod_{k\mid n}\left(X^{\frac{n}{k}}-1\right)^{-\mu(k)}=\frac{1}{\Phi_n(X)}$$

Application :

On avait établi précédemment : $\Phi_8(X)=X^4+1$. Alors :

1. $\Phi_{16}(X)=\Phi_{2\times 8}(X)=\Phi_8(X^2)=X^8+1$ (cas 1)
2. $\Phi_{24}(X)=\Phi_{3\times 8}(X)=\dfrac{\Phi_8(X^3)}{\Phi_8(X)}=\dfrac{X^{12}+1}{X^4+1}=X^8-X^4+1$ (cas 2)

26. Corollaire

Pour $1<n$, $\Phi_{2n}(X)=\begin{cases}\Phi_n\left(X^2\right) \text{ si } n \text{ est pair}\\ \Phi_n(-X) \text{ si } n \text{ est impair}\end{cases}$

DEMONSTRATION :

La première formule est l'application immédiate du théorème précédent au cas $p=2$. La deuxième demande un peu plus de travail puisque ce théorème dans le cas n impair donne : $\Phi_{2n}(X)=\dfrac{\Phi_n\left(X^2\right)}{\Phi_n(X)}$.

$$\Phi_{2n}(X)=\frac{\Phi_n\left(X^2\right)}{\Phi_n(X)}=\frac{\prod_{d|n}\left(X^{2\frac{n}{d}}-1\right)^{\mu(d)}}{\prod_{d|n}\left(X^{\frac{n}{d}}-1\right)^{\mu(d)}}=\frac{\prod_{d|n}\left(X^{\frac{n}{d}}-1\right)^{\mu(d)}\left(X^{\frac{n}{d}}+1\right)^{\mu(d)}}{\prod_{d|n}\left(X^{\frac{n}{d}}-1\right)^{\mu(d)}}=\prod_{d|n}\left(X^{\frac{n}{d}}+1\right)^{\mu(d)}.$$

Or $\dfrac{n}{d}$ étant impair, on peut écrire :

$$\Phi_{2n}(X)=\prod_{d|n}\left(X^{\frac{n}{d}}+1\right)^{\mu(d)}=\prod_{d|n}(-1)^{\mu(d)}\left((-X)^{\frac{n}{d}}-1\right)^{\mu(d)}=(-1)^{\sum_{d|n}\mu(d)}\prod_{d|n}\left((-X)^{\frac{n}{d}}-1\right)^{\mu(d)}.$$

Or, pour $1<n$, $\sum_{d|n}\mu(d)=0$. Au final :

$$\Phi_{2n}(X)=\prod_{d|n}\left((-X)^{\frac{n}{d}}-1\right)^{\mu(d)}=\Phi_n(-X).$$

27. Proposition

Si les décompositions de n, m en facteurs premiers sont :

$n=\prod_{i=1}^{k}p_i^{r_i}$ *et* $m=\prod_{i=1}^{k}p_i$ [1]

Alors $\Phi_n(X)=\Phi_m\left(X^{\frac{n}{m}}\right)$

DEMONSTRATION :

Si $m=n$, c'est évident.

Si $m\neq n$, cela signifie que n possède au moins un facteur carré. Alors les diviseurs de n ne divisant pas m sont ceux qui contiennent ce ou ces facteurs carrés.

Les diviseurs de m sont aussi des diviseurs de n. D'où :

$$\Phi_n(X)=\prod_{d|n}\left(X^{\frac{n}{d}}-1\right)^{\mu(d)}=\prod_{d|m}\left(X^{\frac{n}{d}}-1\right)^{\mu(d)}\prod_{\substack{d|n\\ d\nmid m}}\left(X^{\frac{n}{d}}-1\right)^{\mu(d)}$$

Or si d divise n mais pas m, d a un facteur carré et $\mu(d)=0$. D'où :

$$\Phi_n(X)=\prod_{d|m}\left(X^{\frac{n}{d}}-1\right)^{\mu(d)}=\prod_{d|m}\left(X^{\frac{nm}{md}}-1\right)^{\mu(d)}=\prod_{d|m}\left(\left(X^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{m}{d}}-1\right)^{\mu(d)}=\Phi_m\left(X^{\frac{n}{m}}\right)$$

[1] On dit alors que m est le radical de n.

Application :

$$\Phi_{36}(X) = \Phi_{2\times 3}\left(X^{\frac{36}{6}}\right) = \Phi_6\left(X^6\right) = X^{12} - X^6 + 1$$

Valeurs de $\Phi_n(1)$ et $\Phi_n(-1)$

28. Proposition

$$\Phi_n(1)=\begin{cases}0 \text{ si } n=1\\ p \text{ si } n=p^r \text{ avec } p \text{ premier et } 1\le r\\ 1 \text{ sinon}\end{cases}$$

DEMONSTRATION :

1. Évident.
2. Si $r=1$, n est premier, selon 11.5 : $\Phi_n(X)=1+X+\cdots+X^{n-1}$.
   Si $n=p^r$ avec p premier et $2\le r$, alors, $\Phi_n(X)=\Phi_{pp^{r-1}}(X)$ et selon la proposition 18 $\Phi_n(X)=\Phi_{pp^{r-1}}(X)=\Phi_{p^{r-1}}(X^p)$. D'où $\Phi_n(1)=\Phi_{p^{r-1}}(1)$ et en itérant $\Phi_n(1)=\Phi_p(1)=p$.
3. Dans le cas restant, n peut s'écrire $n=p^rq$ où p est premier et ne divise pas q. On aura alors : $$\Phi_n(1)=\Phi_{p^rq}(1)=\Phi_{p^{r-1}q}(1)=\cdots\Phi_{pq}(1)=\frac{\Phi_q(1)}{\Phi_q(1)}=1$$

29. Proposition

$$\Phi_n(-1)=\begin{cases}\text{-2 si } n=1\\ 0 \text{ si } n=2\\ 1 \text{ si } n \text{ est impair } >1\\ \Phi_{2^{k-1}m}(1) \text{ si } n=2^km \text{ où } m \text{ impair}\end{cases}$$

Dans le dernier cas, si $2^{k-1}m$ est une puissance d'un nombre premier p, ce qui advient soit si $k=1$ et $m=p^r$, soit si $2\le k$ et $m=1$, alors $\Phi_n(-1)=\Phi_{\underbrace{2^{k-1}m}_{=p^r}}(1)=p$. Sinon $\Phi_n(-1)=1$.

DEMONSTRATION :

1. Évident.
2. Évident..
3. Si $1<n$ est impair, le corollaire 19 donne : $\Phi_{2n}(X)=\Phi_n(-X)$.Donc $\Phi_n(-1)=\Phi_{2n}(1)$ et d'après la proposition 20 $\Phi_{2n}(1)=1$.
4. Reste à traiter le cas n pair >2 où n s'écrit : $n=2^km$ avec m impair. D'après le corollaire 20 $\Phi_{2^km}(X)=\Phi_{2^{k-1}m}(-X)$. D'où $\Phi_n(-1)=\Phi_{2^{k-1}m}(1)$.

Avec Maple :

```
> for i from 20 to 32 do i,ifactor(i),cyclotomic(i,1),cyclotomic(i,-1); od;
```

$$20,\ (2)^2\ (5),\ 1,\ 1$$
$$21,\ (3)\ (7),\ 1,\ 1$$
$$22,\ (2)\ (11),\ 1,\ 11$$
$$23,\ (23),\ 23,\ 1$$
$$24,\ (2)^3\ (3),\ 1,\ 1$$
$$25,\ (5)^2,\ 5,\ 1$$
$$26,\ (2)\ (13),\ 1,\ 13$$
$$27,\ (3)^3,\ 3,\ 1$$
$$28,\ (2)^2\ (7),\ 1,\ 1$$
$$29,\ (29),\ 29,\ 1$$
$$30,\ (2)\ (3)\ (5),\ 1,\ 1$$
$$31,\ (31),\ 31,\ 1$$
$$32,\ (2)^5,\ 2,\ 2$$

Valeurs de coefficients

Les premiers exemples cités pour $\Phi_n(X)$ pouvaient suggérer que les coefficients appartenaient à $\{-1,0,1\}$. Mais l'exemple de $\Phi_{105}(X)$ calculé par Maple infirmait cette idée. Voici le moment d'examiner les choses de plus près…

30. Proposition

Soit k impair, n décomposé en facteurs premiers : $n=p_1p_2\cdots p_k$ avec $p_1<p_2<\cdots<p_k$ et $p_k<p_1+p_2$. Alors le coefficient de X^{p_k} dans $\Phi_n(X)$ est :$1-k$.

Démonstration :

On notera : $F=\{p_1,p_2,\cdots,p_k\}$.

Un diviseur de n est :

- ✓ Soit égal à 1
- ✓ Soit un produit de i $(1\le i\le k)$ éléments de F.

En notant, pour toute partie A non vide de F $\Pi(A)$ le produit de ses éléments, on définit :

$D_k^0=\{1\}$ et pour $1\le i\le k$, $D_k^i=\{\Pi(F_i)/F_i\subseteq F \text{ et } |F_i|=i\}$.

Autrement dit D_k^i est l'ensemble des diviseurs de n, produits de i facteurs parmi les k facteurs de n. On a :

- ✓ $D_k^1=F=\{p_1,p_2,\cdots,p_k\}$
- ✓ $D_k^k=\{p_1p_2\cdots p_k\}=\{n\}$
- ✓ $|D_k^i|=C_k^i$

L'ensemble des D_k^i, pour $0\le j\le k$ est une partition de l'ensemble des diviseurs de n. D'où :

$$\Phi_n(X)=\prod_{d|n}\left(X^d-1\right)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}=\prod_{d\in D_k^0}\left(X^d-1\right)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}\times\prod_{d\in D_k^1}\left(X^d-1\right)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}\times\cdots\times\prod_{d\in D_k^k}\left(X^d-1\right)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}$$

On projette sur $\mathbb{C}[X]\Big/\left(X^{p_k+1}\right)$.

Alors tous les X^d pour $d\in D_k^2\cup D_k^3\cup\cdots\cup D_k^k$ sont nuls puisqu'alors $d\ge p_1p_2>p_1+p_2>p^k$

$$\overline{\Phi_n(X)}=\left(X\ -1\right)^{\mu(n)}\times\prod_{i\in1\cdots k}\left(X^{p_i}-1\right)^{\mu\left(p_1\cdots\cancel{p_i}\cdots p_k\right)}\times\prod_{d\in D_k^2}(-1)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}\times\cdots\times\prod_{d\in D_k^k}(-1)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}.$$

Comme k impair, $\mu(n)=-1$, $\mu\left(p_1\cdots\cancel{p_i}\cdots p_k\right)=1$. Par ailleurs, pour $d\in D_k^i$ avec $i\in2\cdots k$ $\mu\left(\frac{n}{d}\right)=\pm1$

donc $\prod_{d\in D_k^i}(-1)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}=-1$ et comme $2\cdots k$ a un nombre pair d'éléments leur produit vaut 1. Donc :

$$\overline{\Phi_n(X)}=(X-1)^{-1}\times\prod_{i\in1\cdots k}\left(X^{p_i}-1\right)$$

Comme : $\dfrac{X^{p_k}-1}{X-1}=X^{p_k-1}+\cdots+X+1$.

$$\overline{\Phi_n(X)}=\left(X^{p_1}-1\right)\cdots\left(X^{p_{k-1}}-1\right)\left(X^{p_k-1}+\cdots+X+1\right).$$

Lorsque l'on développe le produit des $k-1$ premiers facteurs, tous les termes issus de 2 ou plus des X^{p_i} auront un exposant strictement supérieur à p_k et seront donc nuls dans $\mathbb{C}[X]\Big/\left(X^{p_k+1}\right)$.

$\overline{\Phi_n(X)} = \left(1 - X^{p_1} - X^{p_2} \cdots - X^{p_{k-1}}\right)\left(X^{p_k-1} + \cdots + X + 1\right)$.

L'ensemble $0 \cdots p_k - 1$ des exposants du terme de droite contient les entiers :

$p_k - p_1, p_k - p_2, \cdots, p_k - p_{k-1}$

Il s'en suit que le terme de degré p_k dans le produit va être obtenu par les choix :

Choix dans le 1° facteur	*Choix dans le 2° facteur*
$-X^{p_1}$	$X^{p_k-p_1}$
$\vdots$	$\vdots$
$-X^{p_i}$	$X^{p_k-p_i}$
$\vdots$	$\vdots$
$-X^{p_{k-1}}$	$X^{p_k-p_{k-1}}$

Son coefficient va donc être : $1-k$.

Exemples :

En dehors de $105 = 5 \times 7 \times 11$, déjà vu, on peut citer :

- ✓ $715 = 5 \times 11 \times 13$ (la proposition n'exige pas que les p_i soient des premiers consécutifs).

ou encore avec $k = 5$

- ✓ $1\,065\,347 = 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23$.

En fait les listes $(p_1, p_2, \cdots, p_k)$ de premiers vérifiant les conditions requises sont beaucoup plus abondantes que ce que l'on pourrait penser. Par exemple, pour $k = 13$, les commandes suivantes de Maple :

```
> P100:=[seq(ithprime(i),i=2..100)]   (liste des 100 premiers premiers)
> k:=13;j:=1;for i from 3 to nops(P100)-k+1 do if P100[i]+P100[i+1]>P100[i+k-
1] then print(j,P100[i..i+k-1]);j:=j+1;fi;od;
```

en déterminent 73 (en se limitant aux premiers consécutifs) depuis :

$$1, [53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107]$$

jusqu'à :

$$73, [457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541]$$

Se pose la question de savoir si pour, pour tout k impair, on peut trouver $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ avec $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ et $p_k < p_1 + p_2$? En cas de réponse positive, cela signifierait que des coefficients de $\Phi_n(X)$ peuvent être arbitrairement grand.

31. Proposition

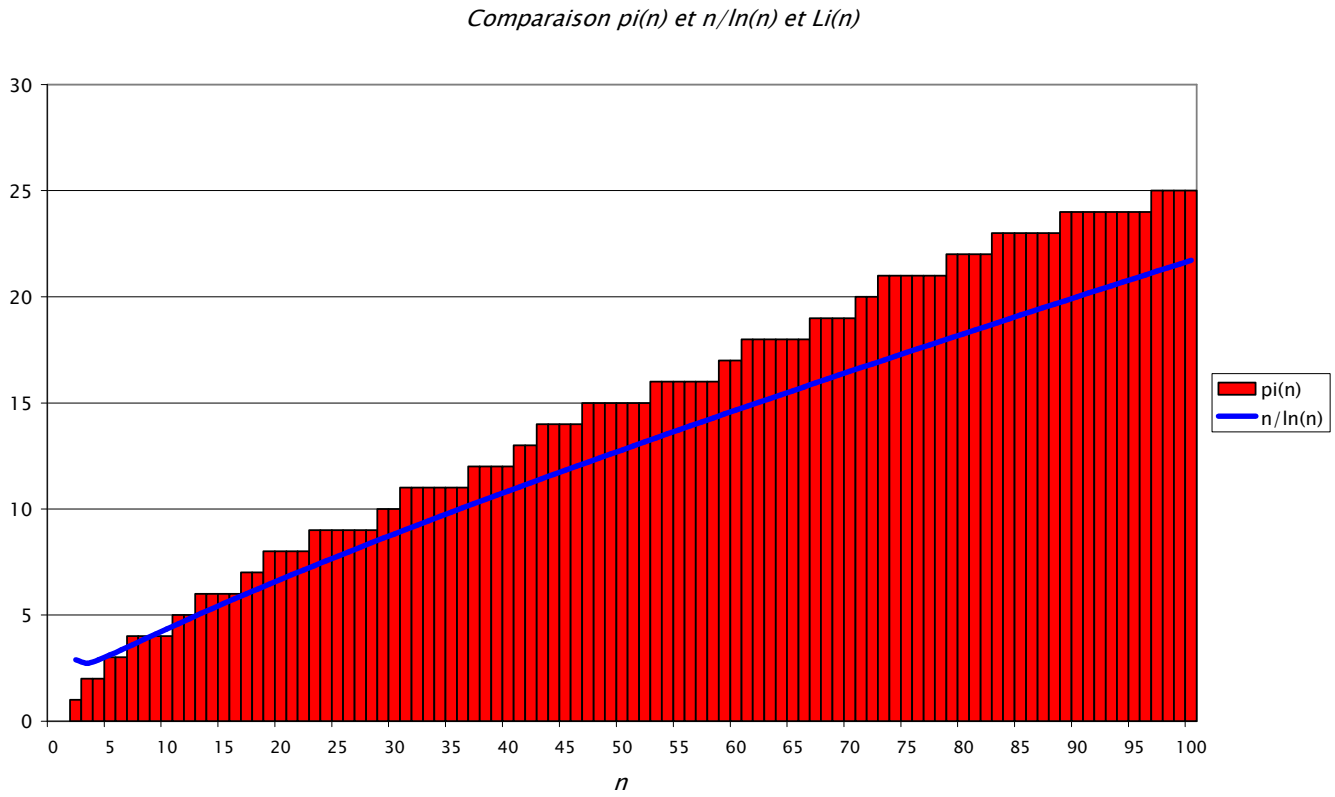
Pour tout entier k impair, il existe une liste de $(p_1, p_2, \cdots, p_k)$ de nombres premiers vérifiant :

1. $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$
2. $p_k < p_1 + p_2$.

DEMONSTRATION :

S'il existe k tel qu'aucune liste $(p_1, p_2, \cdots, p_k)$ ne vérifie les conditions, alors $2p_1 < p_k$. En notant m, le plus grand entier tel que $2^m < p_1$, il s'en suivrait que chaque intervalle $\left[2^{m-1} \quad 2^m\right[$ contiendrait strictement mois de k nombre premiers. Le nombre de premiers appartenant à $\left[1 \quad 2^m\right[= \bigcup_{j=1}^{m} \left[2^{j-1} \quad 2^j\right[$

serait alors strictement inférieur à km. Le nombre $\pi(2^m)$ de premiers $\leq 2^m$ serait alors strictement inférieur à km. Or la fonction π de comptage des nombres premiers $\leq x$ vérifie la minoration : $\frac{x}{\ln(x)} < \pi(x)$ dès que $11 \leq x$. D'où : $\frac{2^m}{m\ln(2)} < \pi(2^m)$. Mais pour m suffisamment grand $km < \frac{2^m}{m\ln(2)}$. Contradiction.



Dans cet ordre d'idée, il existe un résultat du à EMMA LEHMER :

Théorème

Soit $n = pqr$ *où* p, $q = ap + 2$ *et* $r = \frac{bpq-1}{2}$ *sont premier, alors le coefficient de* $X^{\frac{(p-3)(qr+1)}{2}}$ *dans* $\Phi_n(X)$ *est égal à* $\frac{p-1}{2}$.

On en trouvera une démonstration (assez compliquée) dans [3]. Le théorème de Dirichlet justifie l'existence de q et r premiers.

Exemple :

$p = 7$, $q = 3\times 7 + 2 = 23$, $r = \frac{3\times 7\times 23 - 1}{2} = 241$ D'où :

$n = pqr = 7\times 23\times 241 = 38801$ $\frac{(p-3)(qr+1)}{2} = \frac{4\times(23\times 241+1)}{2} = 11088$. Le coefficient de X^{11088} dans $\Phi_{38801}(X)$ doit être égal à $\frac{p-1}{2} = 3$. Ce que Maple arrive à vérifier en ≈ 28 secondes.

```
> t:=time():coeff(cyclotomic(7*23*241,X),X,11088);duree_calcul:=time()-t;
```

3

duree_calcul := 27.971

Notations

$\lvert E\rvert$	Nombre d'éléments d'un ensemble fini E.
$m\cdots n$	ensemble des entiers i $m\le i\le n$
$m\wedge n$	PGCD des entiers m et n.
$m\,\lvert\, n$	L'entier m divise l'entier n.
φ	Fonction indicatrice d'Euler : $\varphi(n)=\left\lvert\left\{k \text{ entier}/1\le k\le n \text{ et } k\wedge n=1\right\}\right\rvert$
μ	Fonction de Mobius
$\mathcal{P}_n$	l'ensemble des $\varphi(n)$ racines $n^{ème}$ primitives de l'unité dans $\mathbb{C}$.
$A[X]$	Anneau des polynômes sur l'anneau A.
$\Phi_n(X)$	Le n-ième polynôme cyclotomique : $\Phi_n(X)=\prod_{\omega\in\mathcal{P}_n}(X-\omega)=\prod_{\substack{1\le k\le n\\ k\wedge n=1}}\left(X-\omega^k\right)$
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	Anneau (corps si n premier) des entiers modulo n.
A/I	Quotient de l'anneau A par l'idéal I.
aA , (a)	Idéal principal de l'anneau A engendré par a.
$cont(P)$	Le contenu d'un polynôme $P\in\mathbb{Z}[X]$ non nul défini comme le PGCD des coefficients.

Bibliographie

[1] Al Fakir S., *Algèbre et théorie des nombres*, Ellipses (2003).

[2] Escoffier JP, *Théorie de Galois*, Masson (1997).

[3] Lehmer Emma, *On the magnitude of the coefficients of the cyclotomic polynomial.* https://www.projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.bams/1183498920

[4] Malliavin M.-P, *Algèbre commutative*, Masson (1985).

[5] Naudin P., Quitté C., *Algorithmique Algèbrique*, Masson (1992).

[6] Rosser J.B., Schoenfeld L., *Approximate formulas for some functions of prime numbers,* Illinois Journal of Mathematics (1952). https://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.ijm/1255631807

[7] Sauloy Jacques *Algèbre, cours de L3* http://www.math.univ-toulouse.fr/~sauloy/PAPIERS/CoursL3Alg.pdf